Real Analysis
Volume 1

1st year degree honours course

Dr. Arnab Chakraborty

Assistant Professor
Indian Statistical Institute, Kolkata

Formerly

Guest Faculty
Ramakrishna Mission Vidyamandira, Belur

◇

Guest Faculty
Ramakrishna Vivekananda University, Belur

◇

Associate Professor
St. Xavier's College, Kolkata

Sarat Book Distributors
18-B, Shyamacharan De Street
Kolkata 700 073

সূচী

ছাত্রছাত্রীদের প্রতি

আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজী-বই সিরিজের অন্যান্য বইয়ের মত এই বইটাও লেখা শুরু হয়েছিল সেই সব ছাত্রছাত্রীদের কথা মাথায় রেখে যারা ইংরাজী মাধ্যমে পড়ছ, কিন্তু ইংরাজীর চেয়ে যাদের বাংলা বুঝতে বেশী সুবিধা হয়। এখানে যাবতীয় technical term ইত্যাদি ইংরাজীতেই লেখা, উত্তরগুলোও তাই। শুধু বোঝানো অংশটুকু বাংলায়।

অংকের ধারণাগুলো কি করে এল, কি করে একটা অংক নিয়ে চিন্তা করতে হয় তা নিয়ে সহজ বাংলায় আলোচনা করেছি। সেই সঙ্গে আছে 2013 অব্ধি গত দশ বছরেরও বেশী পরীক্ষার যাবতীয় প্রশ্নের উত্তর। এমন কি ভুল অংকগুলোও বাদ নেই, সেগুলো কেন ভুল সেটাও বোঝানো আছে। উত্তরগুলো ইংরাজীতে। আলাদা করে বোঝার সুবিধার জন্য handwriting-এর মত লিখেছি। ফাঁকে ফাঁকে বাংলায় বোঝানো। সেই সঙ্গে বাইরে থেকেও নানারকম অংক আছে। যখন যে জিনিসটা শিখলে তখন তখনই সেই বিষয়ের গত দশ বছরের প্রশ্নগুলো কষে নেওয়া ভালো। নইলে পরীক্ষার আগের টেনশনে মাথার মধ্যে সব ঘেঁটে ঘন্ট যায়। সেইভাবেই এই বইয়ের প্রশ্নগুলো সাজানো।

আর আছে পাতায় পাতায় ছবি। একটা অংকের উত্তর জানা থাকলে লিখে ফেলা কঠিন নয়। কঠিন হল উত্তরটা নিজে নিজে ভেবে বার করা। ছবিগুলো এই কাজে অপরিহার্য। এই বইয়ের অন্যতম উদ্দেশ্য হল তোমাকে ছবি এঁকে অংক করতে উৎসাহিত করা। অংক করার সময়ে যত পারবে ছবি আঁকবে, এমন কি পরীক্ষার খাতাতেও। ওতে সময় নষ্ট হয় না, বরং সময় বাঁচে।

অনেক ছাত্রকে জানি তারা অংক বই খালি পড়ে যায়, নিজেরা কষে না। আবার অনেকে খালি একরাশ প্রশ্নের স্তূপ আধা-খ্যাঁচড়া ভাবে গিলে ফেলার চেষ্টা করে। পরে সেই স্তূপের ভিতর থেকে অংক দিলেও confidently কষে উঠতে পারে না। আর অল্প কিছু ছাত্র থাকে তারা সবকিছু ধীরেসুস্থে ভেবে বুঝে প্রতিটা অংক করতে যায়, ফলে ক্লাসে এত পিছিয়ে পড়ে যে শেষে দুশ্চিন্তায় অংকের প্রতি ভালোবাসাই যায় ঘুচে!

সীমিত সময়ের মধ্যে গুছিয়ে অংক শেখার কায়দা হল একই অংক বারবার করে বুঝে বুঝে করা। আজ যে অংকটা "বুঝে গেছি" বলে মনে হল, এক সপ্তাহ পর সেটাই কষতে গিয়ে খেই পাওয়া যায় না। এতে লজ্জার কিছু নেই, বারবার করে একই অংক করার কোনোই বিকল্প নেই। কিন্তু সময় যে কম! তাই বুদ্ধিমানের কাজ হল একরাশ প্রশ্নের খোঁজে হন্যে না হয়ে অল্প কিছু সুনির্বাচিত অংকের গভীরে ঢোকা। এদের মধ্যে পরীক্ষার প্রশ্নের পাশাপাশি অংকের ভিত মজবুত করার উপকরণও চাই। এই বইয়ের প্রশ্নগুলো ঠিক এই কথা মাথায় রেখেই নির্বাচিত। প্রায় প্রতিটা অংকেরই উত্তর দেওয়া আছে সেই অধ্যায়ের শেষে। এই বইতে অংক নিয়ে অনেক গল্প পাবে, কিন্তু সেই মজায় মজে যেন exercise-গুলো কষে উত্তরের সাথে মিলিয়ে নিতে ভুলো না। অংক হল প্রেমের মত, অন্যকে করতে দেখার চেয়ে নিজে করতে মজা বেশী!

এরপরে কি?

অংক শেখার সীমা-পরিসীমা নেই। কিন্তু বইমাত্রেরই একটা সীমা থাকে। সিলেবাস-টিলেবাসের তোয়াক্কা না রেখে যারা সেই সীমা পেরিয়ে আরও জানতে চাও তারা অনেক সময়ে প্রশ্ন করো--আরও কি পড়া যায়? তারা এই কয়টা বই চেষ্টা করতে পারো।

1. Real Mathematical Analysis, লেখক C C Pugh
2. Real Analysis, লেখক N L Carothers
3. Real Analysis, লেখক Casper Goffman

যারা অংক নিয়ে বন্ধুদের সঙ্গে আলোচনা করতে চাও কিন্তু হাতের কাছে সেরকম বন্ধু পাও না, তারা Facebook -এর Mathemaniac বলে একটা group-এ যোগ দিতে পারো। সেখানে নানারকম মজার মজার অংক এবং competitive পরীক্ষার অংক নিয়ে আলোচনা হয়।

কৃতজ্ঞতাস্বীকার

প্রথম সংস্করণের বিভিন্ন ত্রুটি দূর করা হয়েছে এই সংস্করণে। সাহায্য পেয়েছি অনেকের। সর্বপ্রথমেই আসে IISER-এর অধ্যাপক ডঃ অশোক নন্দের কথা, যিনি অসামান্য ধৈর্য্যসহকারে প্রথম সংস্করণের নানারকম ছাপার ভুল বার করেছেন, এবং গুরুত্বপূর্ণ মতামত দিয়েছেন। ছাত্রছাত্রীদের মধ্যে যারা "স্যারের ভুল ধরা"-র কাজে অগ্রণী ভূমিকা নিয়েছে তাদের মধ্যে উল্লেখযোগ্য কয়েকজন-- শারণ্য, পিয়ালী, প্রীতীশ, জীবিতেশ, রামিজ, সৈকত, শামিম, শশাংক, নাল্টু, অপরাজিতা, চন্দ্রিল, তন্ময়, পরিক্ষিত, মহামিত্র আর প্রজামিত্র। ফোন, ই-মেল আর Facebook মারফতও বিভিন্ন উৎসাহ ও পরামর্শ এসেছে। সব্বার জন্য রইল একটা মস্ত বড়

যোগাযোগ

এই বইটাকে যথাসম্ভব ত্রুটিমুক্ত রাখতে চেষ্টা করেছি। তাও কিছু ভুল থেকে যাওয়া আশ্চর্য নয়। কোনো ভুলের সন্ধান পেলে, বা অন্য কারণে যোগাযোগ করতে চাইলে email (arnabc74@gmail.com) বা ফোন (9231542600) ব্যবহার করতে পারো। আর Facebook তো আছেই! এই বইয়ের জন্য একটা website বানিয়েছি--

http://cwave.eu5.org/real1

ভুলত্রুটি যা ধরা পড়বে তার একটা তালিকা এখানে দেব। আর থাকবে নানারকম বাড়তি প্রশ্ন, বিভিন্ন পরীক্ষা থেকে। এখানে Facebook-এর ধরণের একটা মন্তব্য লেখার জায়গাও পাবে। যাদের ই-মেল নেই, তারা মোবাইল থেকেই সেইখানে মন্তব্য লিখে দিলেই আমার কাছে পৌঁছে যাবে। আমার উত্তরও আমি ওইখানেই লিখে দিতে পারব।

সুতরাং যোগাযোগ রাখতে ভুলো না!

অর্ণব চক্রবর্তী

Chapter I
অংক লেখার কায়দা

DAY 1
অংকের ভাষা

অংকের একটা নিজস্ব ভাষা আছে। সেই ভাষাটা একটু রপ্ত না করে নিলে অংক শেখা কঠিন। প্রথমে আমরা সেইটা নিয়ে আলোচনা করব।

1.1 সাধারণ ভাষার সমস্যা

ধর যদি বলি

> "I saw a girl with a telescope."

এর মানে কি? এর দু'রকম অর্থ হতে পারে। এক, আমি টেলিস্কোপ দিয়ে একটা মেয়েকে দেখতে পেয়েছি (Fig 1)। আর দুই, একটা মেয়ে যাচ্ছিল একটা টেলিস্কোপ নিয়ে, আমি তাকে দেখেছি (Fig 2)। ইংরাজি বাক্যটা থেকে কিন্তু মোটেই বোঝা যাচ্ছে না, যে আমি এ দুয়ের মধ্যে কোন অর্থটা বোঝাতে চেয়েছিলাম। বলাই বাহুল্য যে এরকম ভাষায় অংক লিখলে মানে বোঝা কঠিন। লেখক হয়তো একটা মানে ভেবে লিখেছেন, এদিকে পাঠক অন্য মানে করে বসে আছে। এরকম ক্ষেত্রে আমরা অবশ্য ব্র্যাকেট লাগিয়ে মানেটা বোঝাতে পারতাম (যদিও সেটা দেখতে বিচ্ছিরি হত)। যেমন যদি লিখতাম

> "(I saw a girl) with a telescope."

তার মানে আমি একটা টেলিস্কোপ দিয়ে একটা মেয়ে দেখেছি (Fig 1)। আর যদি বলতে চাইতাম যে আমি টেলিস্কোপ-ওয়ালা একটা মেয়ে দেখেছি (Fig 2), তবে ব্র্যাকেটটা অন্যভাবে দিতাম--

> "I saw (a girl with a telescope)."

অবশ্য প্রতিদিনের ভাষায় আমরা এরকম ব্র্যাকেট বসাই না। তাতে আমাদের অসুবিধা হয় না কেন? সেটা বোঝার জন্য এই বাক্যটা দ্যাখো, এটাও গঠনগতভাবে আগের বাক্যটার মতই--

Fig 1

(I saw a girl)

with a telescope.

Fig 2

I saw (a girl with

a telescope).

"I went to a college with a bag."

এখানেও আমরা এর দুটো মানে করতে পারি। এক, "(I went to a college) with a bag." তার মানে আমি কলেজে গেছিলাম, এবং তখন সঙ্গে একটা ব্যাগ ছিল। আর দুই, "I went to (a college with a bag)." যার মানে আমি একটা ব্যাগ-ওয়ালা কলেজে গেছিলাম। এখানে কিন্তু আমাদের সন্দেহ নেই যে দ্বিতীয় মানেটা আসলে ফালতু, কারণ "ব্যাগ-ওয়ালা কলেজ" বলে কিছু হয় না। তাহলে বোঝো, এই বাক্যটা শোনামাত্র আমাদের মস্তিষ্ক মনে মনে দুইভাবে ব্র্যাকেট বসিয়ে দেখেছে যে দ্বিতীয় অর্থটার কোনো মানে দাঁড়ায় না, তাই প্রথম অর্থটাকে রেখেছে। এই যে আমরা চট্ করে বলতে পারলাম যে "ব্যাগ-ওয়ালা কলেজ" বলে কিছু হয় না, তার কারণ আমরা ব্যাগ এবং কলেজ দুটো জিনিসের সঙ্গেই খুব ভালো করে পরিচিত। তাই জানি যে একটাকে আরেকটার ঘাড়ে চাপানো যায় না। অর্থাৎ "I went to a college with a bag" বাক্যটার অর্থ বোঝার জন্য আমাদের কলেজ এবং ব্যাগ সম্পর্কে বাড়তি জ্ঞানের দরকার পড়ল।
কিন্তু অংক শেখার সময়ে আমরা বহু নতুন ধারণার অবতারণা করব যেগুলোর বিষয়ে আমাদের আগেভাগে বাড়তি জ্ঞান থাকবে না। সুতরাং তাদের নিয়ে কথা বলতে গেলে একই কথার একাধিক মানে হয়ে দাঁড়াবে, এবং আমি হয়তো এক অর্থে কথাটা বলব, কিন্তু তুমি ভুলে অন্য অর্থ বুঝে গোলমালে পড়বে। সেই কারণেই অংকের একটা নতুন ভাষা দরকার, এমন একটা ভাষা যার প্রতিটা বাক্যের ঠিক একখানা করেই মানে হয়।
আরেক রকম উদাহরণ দেখি যেখানে প্রতিদিনকার ভাষা আমাদের বিপদে ফেলতে পারে। ধর একটা কো-এডুকেশন কলেজ নিয়ে কথা হচ্ছে। যদি বলি

"Roll no. 1 is not a boy."

তার মানে হল

"Roll no. 1 is a girl."

একইভাবে যদি বলি "Sudipta is not a boy." তুমি বুঝবে যে কথাটা এখানে সুদীপ্তকে নিয়ে হচ্ছে না, হচ্ছে জনৈকা সুদীপ্তাকে নিয়ে, এবং "Sudipta is a girl." এইদুটো উদাহরণ থেকে তুমি মনে করতে পারো যে "not a boy" মানেই হল "a girl". ছেলে যদি না হয়, তবে নিশ্চয়ই মেয়ে! কিন্তু মানুষের ভাষা এমনই গোলমেলে জিনিস যে এ কথাটা মোটেই ঠিক নয়। যদি বলি

"Everybody in this class is <u>not a boy</u>."

মানে এ ক্লাসের প্রত্যেকেই ছেলে নয়, তার মানে নিশ্চয়ই এই নয় যে "not a boy"-এর জায়গায় "a girl" বসিয়ে দিলেই মানেটা ঠিক থাকবে--

"Everybody in this class is <u>a girl</u>."

এর মানে দাঁড়ালো ক্লাসের প্রত্যেকেই মেয়ে, অথচ আমরা বলতে চেয়েছিলাম যে ক্লাসে অন্ততঃ একটা মেয়ে আছে। তার মানে ইংরাজির ঝামেলা বোঝো "not a boy" মানে কি "a girl"? উত্তর হল কখনো হ্যাঁ, কখনো না, সেটা নির্ভর করছে বাক্যের বাকী অংশের উপরে। এই রকম ভাষায় অংক লেখা চলে না। অংকের ভাষা হতে হবে ছিমছাম, তার প্রত্যেকটা অংশের সবসময়ে একটাই মানে হবে, এবং সেই মানেটা বাক্যের বাকী অংশের উপর নির্ভর করে আজকে এরকম, কালকে অন্যরকম হবে না।
আমরা এতক্ষণ খালি ইংরাজি বাক্যের উদাহরণ দিয়েছি বলে যেন ভেবে বোসো না, যে আমাদের আ মরি বাংলা ভাষা কিছু মাত্র কম ঝামেলাজনক। এক দুধ-ওয়ালার কথা শুনেছিলাম যে "খাঁটি গোরুর দুধ" বলে জল মেশানো দুধ চালাত। ধরা পড়ে বলেছিল যে, "আজ্ঞে আমি তো দুধটা খাঁটি বলি নি, বলেছিলাম গোরুটা খাঁটি, বিশ্বাস না হয়, নিজের চোখেই গোরুটাকে দেখুন!" অর্থাৎ "খাঁটি (গোরুর দুধ)" তো বলে নি, বলেছে "(খাঁটি গোরু)-র দুধ!"

1.2 অংকের ব্যাকরণ

অংকের ভাষা মানুষের মুখের ভাষা নয়, এটা অংক-সম্পর্কিত ভাবপ্রকাশের ভাষা। যেহেতু অংক ব্যাপারটা কোনো দেশ বা জাতির সম্পত্তি নয়, তাই অংকের ভাষাও গোটা বিশ্বে একটাই। এবং এই ভাষা বহু সময় ধরে গণিতজ্ঞরা একটু একটু করে গড়ে তুলেছেন, সহজে ভাবের আদান প্রদান করার জন্য। এ ভাষার ব্যাকরণ কিন্তু তা বলে মোটেই কঠিন নয়। এতে নিয়ম কানুন অতি অল্পই, এবং যে কটা নিয়ম আছে তাদের কোনো ব্যতিক্রম নেই।
যে কোনো ভাষা শিখতে দুটো জিনিস শিখতে হয়। এক, কিছু নতুন শব্দ, আর দুই, সেই শব্দগুলো সাজানোর কিছু নিয়ম। অংকের ভাষায় নতুন শব্দ হল

1. $\in$ বা "in" (বা "belongs to")
2. $\forall$ বা "for all"
3. $\exists$ বা "there exists"
4. $\implies$ বা "only if" বা "implies"
5. $\impliedby$ বা "if" বা "implied by"
6. $\iff$ বা "if and only if" বা "iff"
7. $\neg$ বা "not"

এছাড়া অন্যান্য পরিচিত চিহ্নগুলো (যেমন $+, -$ ইত্যাদি) তো আছেই। এবার দেখি এদের ব্যবহার কি ভাবে করে।

1.2.1 Belongs to বা in: $\in$

ধর একটা set দেওয়া আছে আর একটা কোনো জিনিস দেওয়া আছে। যদি সেই জিনিসটা setটার element হয় তবে সেটা বোঝাতে আমরা $\in$ চিহ্নটা ব্যবহার করি। যেমন $A = \{1, 4, 5\}$-এর মধ্যে 1 আছে, তাই লিখব $1 \in A$, পড়ব--"1 in A."কিন্তু 2 এই set-এ নেই, অতএব $2 \notin A$, অর্থাৎ "2 not in A."
অনেক ছাত্র $\subseteq$ আর $\in$-এর মধ্যে গুলিয়ে ফেলে। $\subseteq$ হল subset-এর চিহ্ন, ওর দু দিকেই একটা করে set লিখতে হয়, যেমন $\{1, 5\} \subseteq A$, বা $\{2, 5\} \not\subseteq A$. এখানে $1 \subseteq A$ বা $\{1, 5\} \in A$ লেখা ভুল।

Exercise 1: ধর $B = \{2, 5, 7, 8\}$. তবে নীচের কোন কথাগুলো ঠিক?
(1) $5 \in B$ **(2)** $\{5\} \in B$ **(3)** $\{5\} \subseteq B$ **(4)** $\{5\} \notin B$
■

1.2.2 For all: $\forall$

"বিশ্বের সব পুরুষই শক্তিশালী"--এই কথাটাকে অংকের ভাষায় লিখব এইভাবে--

$$\forall m \in \text{MAN} \quad m \text{ is strong.}$$

পড়ব-- "For all m in MAN m is strong." এখানে MAN হল বিশ্বের সব পুরুষের set. "$\forall m \in$ MAN" মানে "for all m in MAN, বা সব পুরুষ m-এর জন্য। অতএব পুরো বাক্যটার মানে হল এই যে "m is strong" কথাটা সব পুরুষ m-এর জন্যই প্রযোজ্য। এইভাবে ঘুরিয়ে কথা বলাটা অদ্ভুত লাগতে পারে, কিন্তু এর সুফল শীঘ্রই দেখবে।

Example 1: Fig 3-এ একটা set A রয়েছে। লক্ষ কর যে সবগুলো element-ই positive. এটাকে আমরা লিখব

$$\forall x \in A \quad x > 0.$$

Fig 3

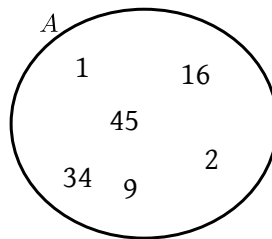
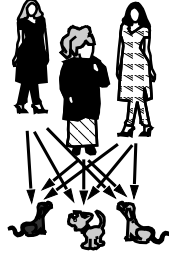
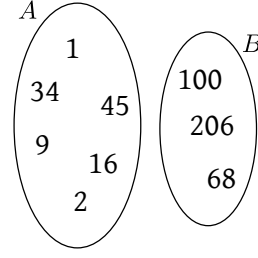



Fig 4 **Fig 5**

■

Exercise 2: যদি A কিছু সংখ্যার set হয় তবে নীচের কথা দুটোকে অংকের ভাষায় লেখো।
(1) A-র সব সংখ্যাই negative. **(2)** A-র সব সংখ্যাই 10-এর চেয়ে ছোটো। ■

Exercise 3: যদি $B=\{1,3,5,7,8\}$ হয় তবে নীচের বাক্যগুলোর মধ্যে কোনগুলো ঠিক?
(1) $\forall x\in B\quad 1\leq x<20.$ **(2)** $\forall x\in B\quad x$ is odd. **(3)** $\forall a\in B\quad 2a>1.$ ■

একই বাক্যে অনেক সময়ে একাধিক $\forall$ ব্যবহার করতে হয়। যেমন Fig 4-এ কিছু মেয়ে আর কিছু কুকুর দেখা যাচ্ছে। একটা মেয়ের থেকে তীর চিহ্ন একটা কুকুরে গেলে বুঝবে যে সেই মেয়েটা সেই কুকুরটাকে ভালোবাসে। লক্ষ কর এখানে সবগুলো মেয়েই সবগুলো কুকুরকে ভালোবাসে। এটাকে লিখব--

$$\forall w\in GIRL\quad \forall d\in DOG\quad w \text{ loves } d.$$

Exercise 4: Fig 5-এ দুটো set রয়েছে। লক্ষ কর যে A set-এর সব সংখ্যাই B-এর সব সংখ্যার চেয়ে ছোটো। এটা কি ভাবে অংকের ভাষায় লিখবে? ■

1.2.3 There exists: $\exists$

এবার Fig 6-এ দ্যাখো, A-র মধ্যে 10-এর চেয়ে ছোটো অন্ততঃ একটা সংখ্যা দেখতে পাচ্ছো নিশ্চয়ই? এই যে A-তে অন্ততঃ একটা সংখ্যা আছে যেটা 10-এর চেয়ে ছোটো--এই কথাটাকে আমরা অংকের ভাষায় লিখব

$$\exists x\in A\quad x<10.$$

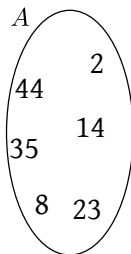
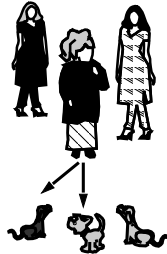
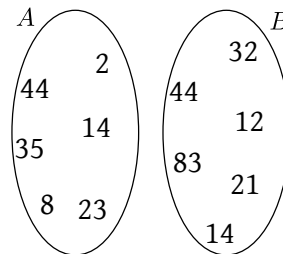



Fig 6 **Fig 7** **Fig 8** **Fig 9**

এটাকে পড়ব--"There exists at least one x in A such that $x < 10$." লক্ষ কর যে 10-এর চেয়ে কম সংখ্যা A-তে খালি একটা নয় দুটো আছে। কিন্তু তাতে অসুবিধা নেই, কারণ ওই যে লিখেছি "at least one" মানে অন্ততঃ একটা! আবার একটা কুকুর-আর-মেয়ের উদাহরণ দেখি (Fig 7)। আগের চেয়ে মেয়েদের কুকুরপ্রীতি কিছুটা কমেছে দেখছি। তাও অন্ততঃ একটা মেয়ে এখনো অন্ততঃ একটা কুকুরকে ভালোবাসে, মানে--

$$\exists w \in GIRL \quad \exists d \in DOG \quad w \text{ loves } d.$$

Exercise 5: Fig 8 দেখে বলো এই কথাটা ঠিক না ভুল--

$$\exists a \in A \quad \exists b \in B \quad a = b.$$

■

এখানে দুটো কথা বলে রাখি--

- $\forall$ বা $\exists$ চিহ্নের পরে সব সময়ে একটা variable-এর নাম বসে, যেমন m, w, x, y, z ইত্যাদি। কোন নাম বসছে সেটা গুরুত্বপূর্ণ নয়। যেমন এই দুটো লাইনেরই মানে এক (সব মেয়েই লম্বা)--

  $$\forall w \in \text{GIRL} \quad w \text{ is tall.}$$

  আর

  $$\forall x \in \text{GIRL} \quad x \text{ is tall.}$$

  খালি দুই জায়গাতেই একই variable ব্যবহার করতে হবে, যেমন "$\forall x \in \text{GIRL} \quad w$ is tall." লিখলে চলবে না।

- $\forall$ বা $\exists$-এর পরে যেন কোনো ফর্মুলা লিখো না। যেমন ধরো আমরা জানি যে কোনো even (জোড়) সংখ্যার সাথে 1 যোগ করলে একটা odd (বিজোড়) সংখ্যা পাওয়া যায়। যদি যাবতীয় even সংখ্যার set-কে $EVEN$ এবং যাবতীয় odd সংখ্যার set-কে ODD নাম দিই তবে আমরা লিখতে পারি--

  $$\forall n \in EVEN \quad n + 1 \in ODD.$$

  এদিকে আমরা জানি যে even সংখ্যাদের $2n$ আকারে লেখা যায়। তাই অনেক ছাত্রছাত্রীকেই দেখেছি ভুল করে এরকম লিখতে--

  $$\forall 2n \in EVEN \quad 2n + 1 \in ODD.$$

  এটা ভুল, কারণ $\forall$-এর পরে $2n$ বসতে পারে না।

1.2.4 $\forall, \exists$ একসাথে

যদি বলি "ও বাড়ির মেয়েটা কুকুর পোষে," তবে তার মানে নিশ্চয়ই এই নয় যে মেয়েটা বিশ্বসংসারের সব কুকুরকে পুষ্যি নিয়ে বসে আছে! এর মানে ও কোনো একটা (অন্ততঃ একটা) কুকুর পোষে। এবার Fig 9-এর দিকে চোখ ফেরালেই দেখবে সবগুলো মেয়েই কুকুর পোষে। তার মানে--

$$\forall g \in GIRL \quad \exists d \in DOG \quad g \text{ has } d. \qquad (\mathbf{1})$$

এই বাক্যটাকে পড়ব এইভাবে--

For all g in $GIRL$, there exists a d in DOG such that g has d.

এর মানেটা ধাপে ধাপে বোঝা যাক-- "$\forall g \in GIRL$" মানে তো জানিই-- আমরা যা বলতে যাচ্ছি সেটা সকল মেয়ে g-এর ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। সেই কথাটা হল এই যে এমন একটা কুকুর d আছে ("$\exists d \in DOG$") যাতে ("such that") সেই g মেয়েটা d কুকুরটাকে পোষে। এখানে কয়েকটা জিনিস লক্ষ কর--

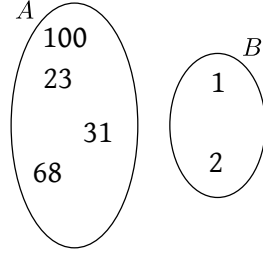
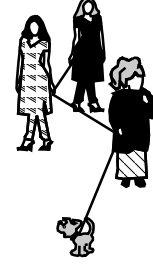



Fig 10 **Fig 11**

1. প্রতিটি মেয়েই যে ঠিক একটা করেই কুকুর পোষে তা কিন্তু নয়। কেউ কেউ (যেমন মোটা মেয়েটা) একাধিক কুকুরও পুষতে পারে। "$\exists d \in DOG$" মানে "অন্ততঃ একটা কুকুর d আছে ", এর মধ্যে কোথাও একমাত্র একটাই কুকুর d আছে বলা নেই। এই প্রসঙ্গে একটা বাচ্চাদের ঠকানো প্রশ্ন মনে পড়ল-- কোন কোন মাসে 28 দিন আছে? এর উত্তর কিন্তু খালি ফেব্রুয়ারী নয়! সঠিক উত্তর হল-- সব মাসেই। আমি তো বলি নি যে খালি 28 দিনই আছে!

2. দুটো মেয়ের পোষা কুকুর আলাদা হতেও পারে, নাও পারে। মোটা মেয়েটার কুকুর দুটোকে রোগা দুই বোন পোষে না। আবার রোগা দুই বোন দুজনে মিলে একটাই কুকুর পোষে। অংকের ভাষায় এটা বোঝানো হয় আগে "$\forall g \in GIRL$" এবং তার পরে "$\exists d \in DOG$" লিখে। এর মানে $\exists$-এর d-টা $\forall$-এর g-টার উপর নির্ভর করতে পারে।

Exercise 6: Fig 10-এর জন্য কি নীচের বাক্যটা ঠিক?

$$\forall a \in A \quad \exists b \in B \quad 3 \text{ divides } a - b.$$

■

1.2.5 কে আগে, কে পরে

এবার Fig 11 দ্যাখো। এখানে সব মেয়েই দেখছি একটা বিশেষ কুকুরকেই পোষে। এই ব্যাপারটাকে বোঝাতে লিখব--

$$\exists d \in DOG \quad \forall g \in GIRL \quad g \text{ has } d. \tag{2}$$

পড়ব--"There exists a d in DOG such that for all g in GIRL g has d. এটা ঠিক আগের বাক্যটার মতই, খালি $\exists$-টা $\forall$-এর আগে চলে গেছে। তাই এখন আর $\exists$-এর d-টা $\forall$-এর g-এর উপর নির্ভর করতে পারছে না। আমরা এখানে আগে একটা বিশেষ কুকুর d স্থির করে নিয়ে তার পর বলছি যে সব মেয়ে $g \in GIRL$-ই সেটাকে পোষে।
তার মানে $\forall$ আর $\exists$-এর ক্রম পরিবর্তন করলে মানে বদলে যায়। তাই (**1**) আর (**2**)-এর মানে এক নয়। আরো লক্ষ কর যে (**2**) হল (**1**)-এর চেয়ে বেশী strong, কারণ যদি (**2**) ঠিক হয় তবে (**1**) ঠিক হতে বাধ্য। যেমন Fig 11-এর বেলায় (**2**) ঠিক, তাই (**1**)-ও ঠিক।
কিন্তু (**1**) ঠিক হলেই যে (**2**)-ও ঠিক হবে এমন কোনো কথা নেই, যেমন Fig 9-এর বেলায় (**1**) ঠিক, কিন্তু (**2**) ভুল। মনে রেখো যে কোনো বাক্যে $\exists$-কে $\forall$-এর আগে নিয়ে এলে আরও strong বাক্য পাওয়া যায়। নীচের অংকটা করলে ব্যাপারটা স্পষ্ট হবে।

Exercise 7: এই বাক্যদুটোর মধ্যে কোনটা বেশী strong? Fig 10-এর জন্য কোন বাক্যটা ঠিক? (বেশী strong বাক্যটা ঠিক হলে অন্যটাও ঠিক হতে বাধ্য।)

- $\forall a \in A \quad \exists b \in B \quad 3 \text{ divides } a - b.$
- $\exists b \in B \quad \forall a \in A \quad 3 \text{ divides } a - b.$

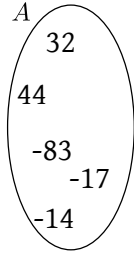
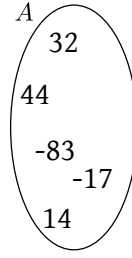



Fig 12 **Fig 13**

■

কিন্তু দুটো পরপর $\forall$-এর ক্রম পরিবর্তন করলে অর্থ বদলায় না। একইভাবে তুমি নিশ্চিন্তে দুটো পরপর $\exists$-কে আগে পরে করতে পারো, তাতেও অর্থের কোনো পরিবর্তন হবে না।

1.2.6 If, only if, iff: $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$

Fig 12-এর set-টার একটা বৈশিষ্ট্য আছে--এর মধ্যে যেসব সংখ্যা positive তারা সবাই জোড় সংখ্যা (even). এই কথাটাকে অংকের ভাষায় লেখা যায়--

$$\forall x \in A \quad (x > 0 \implies x \text{ is even}).$$

লক্ষ কর কিভাবে ব্র্যাকেটটা দিয়েছি। এটাকে পড়ব--"For all x in A, if $x > 0$ then x is even." এটাকে এভাবেও পড়া যায়-- "For all x in A, $x > 0$ only if x is even."
একটা কিছু হলে অন্য কিছু একটা হয় এটা বোঝানোর জন্য " $\Longrightarrow$ "-এর ব্যবহার--

"কি হলে" $\Longrightarrow$ "কি হবে"।

একই জিনিসকে আমরা " $\Longleftarrow$ " দিয়েও লিখতে পারি--

"কি হবে" $\Longleftarrow$ "কি হলে"।

যেমন, Fig 12-এর ক্ষেত্রে আমরা বলতে পারতাম

$$\forall x \in A \quad (x \text{ is even} \impliedby x > 0).$$

এটাকে পড়ব "For all x in A, x is even if $x > 0$."

Exercise 8: Fig 12-র জন্য কি এই কথাটা ঠিক?

$$\forall x \in A \quad (x \text{ is even} \implies x > 0).$$

■

এবার Fig 13 দ্যাখো। এবার কিন্তু positive সংখ্যা মাত্রেই even, এবং even সংখ্যা মাত্রেই positive, তাই--

$$\forall x \in A \quad (x \text{ is even} \iff x > 0).$$

পড়ার সময়ে পড়ব এইভাবে--"For all x in A, x is even if and only if $x > 0$."
এই " $\Longrightarrow$ " আর " $\Longleftarrow$ "-এর বদলে অনেক সময়ে "necessary" আর "sufficient" শব্দদুটো ব্যবহার হয়। যদি A আর B যে কোনো দুটো শর্ত হয়, তবে নীচের ছয়টা কথা সমার্থক--

$$\begin{array}{lll} A \implies B & A \text{ only if } B & A \text{ is sufficient for } B \\ B \impliedby A & B \text{ if } A & B \text{ is necessary for } A \end{array}$$

মনে রাখার সহজ উপায় হল তীর চিহ্নটার গোড়ায় যেটা থাকে সেটা হল sufficient, আর ডগায় যেটা থাকে সেটা হল necessary.

1.2.7 Converse

একটু আগেই আমরা এই দুটো বাক্য লিখেছিলাম--

$$\forall x \in A \quad (x \text{ is even} \implies x > 0)$$

আর

$$\forall x \in A \quad (x \text{ is even} \impliedby x > 0).$$

এরা দেখতে প্রায় একই রকম, খালি " $\implies$ "-টা মুখ ঘুরিয়ে " $\impliedby$ " হয়ে গেছে। এই দুটো বাক্যকে বলব পরস্পরের **converse.** যদি A, B যে কোনো দুটো শর্ত হয় তবে "$A \implies B$"-র converse হবে "$A \impliedby B$", (যাকে "$B \implies A$"-ও লেখা যায়)। একটা বাক্য ঠিক হলেই তার converse-ও ঠিক হবে এমন কোনো কথা নেই, ঠিক হতেও পারে, ভুলও হতে পারে। যেমন যদি বলি সিগারেট খেলে ক্যান্সার হয়, অর্থাৎ

সিগারেট খাওয়া $\implies$ ক্যান্সার হওয়া,

তা থেকেই মোটেই সিদ্ধান্ত করার কারণ নেই যে যাদেরই ক্যান্সার ধরা পড়েছে, তারা সবাই সিগারেট খায়, অর্থাৎ converse-টা, মানে

সিগারেট খাওয়া $\impliedby$ ক্যান্সার হওয়া

মোটেই ঠিক নয়।

Exercise 9: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে একটা করে সঠিক বাক্য দেওয়া আছে। এদের converse বার কর, এবং কোন কোন ক্ষেত্রে converse-টা ঠিক বল।

1. সব বাবারাই পুরুষ মানুষ।
2. সব square number-ই nonnegative (মানে ≥ 0).
3. কোনো সংখ্যা 2 এবং 3 দিয়ে ভাগ গেলে 6 দিয়ে ভাগ যায়।

■

1.2.8 Negation: $\neg$

এবার আমরা শিখব কোনো বাক্যের উল্টো বাক্য গঠন করা। যেমন "আমার খিদে পেয়েছে"-র উল্টো হল "আমার খিদে পায় নি।" এরকম উল্টোনোকে অংকে বলে negation. আমরা negation বোঝাতে $\neg$ চিহ্নটা ব্যবহার করি। তাই--

"$\neg$(আমার খিদে পেয়েছে)" মানে "আমার খিদে পায় নি।"

Example 2: মনে কর কেউ দাবী করেছে যে Fig 14-এর set-টার সব element-ই জোড় সংখ্যা (even), মানে

$$\forall x \in A \quad x \text{ is even.} \tag{*}$$

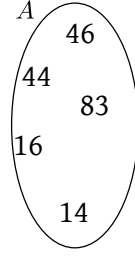



Fig 14

কিন্তু Fig 14-এর দিকে একবার তাকালেই বুঝবে যে দাবীটা মোটেই ঠিক নয়, কারণ দেখাই যাচ্ছে যে ওর মধ্যে অন্ততঃ একটা বিজোড় (odd) সংখ্যা আছে--

$$\exists x \in A \quad x \text{ is odd.} \tag{**}$$

লক্ষ কর যে (*) এবং (**) হল পরস্পরের বিপরীত, তাই লিখতে পারি

$$\neg\Big[\forall x \in A \quad x \text{ is even.}\Big] \text{ হল } \exists x \in A \quad x \text{ is odd.}$$

আবার উল্টোটাও লেখা যায়--

$$\neg\Big[\exists x \in A \quad x \text{ is odd.}\Big] \text{ হল } \forall x \in A \quad x \text{ is even.}$$

■

লক্ষ কর $\neg$-এর প্রভাবে $\forall$-টা উল্টে কিরকম $\exists$ হয়ে গেল, আর $\exists$-টা হয়ে গেল $\forall$. এই ব্যাপারটা সব সময়ে মাথায় রাখবে। এটা ব্যবহার করে কি ভাবে ধাপে ধাপে (*)-এর negation বার করা যায় দ্যাখো-- প্রথম ধাপে $\neg$ আছে একেবারে বাঁদিকে--

$$\neg\Big[\forall x \in A \quad x \text{ is even.}\Big]$$

দ্বিতীয় ধাপে $\neg$-কে $\forall$-এর ভিতরে ঢোকাব, তাতে $\forall$-টা উল্টে $\exists$ হয়ে যাবে--

$$\exists x \in A \quad \neg\Big[x \text{ is even.}\Big]$$

তারপর তৃতীয় ধাপে even-কে উল্টে odd করে দেব--

$$\exists x \in A \quad x \text{ is odd.}$$

ব্যস্, কাজ শেষ।
এই ভাবে যে কোনো বাক্যেরই negation তৈরী করা যায়, $\neg$-টাকে ধাপে ধাপে ডানদিকে সরিয়ে। খালি $\exists$-কে $\forall$, আর $\forall$-কে $\exists$ করে দিতে হয়, এবং সবচেয়ে ভিতরের জিনিসটাকে উল্টে দিতে হয় (যেমন even-কে odd করলাম)।
অংকের ভাষায় যদি যে কোনো একটা বাক্য লেখো এবং তার negation বার কর, তবে যে কোনো ক্ষেত্রেই হয় বাক্যটা ঠিক হবে নয় তো negation-টা ঠিক হবে। দুটোই কখনও এক সঙ্গে ঠিক বা এক সঙ্গে ভুল হবে না। এর একটা উদাহরণ দেখি।

Example 3: ধর এই বাক্যটা--

$$\forall g \in GIRL \quad \exists d \in DOG \quad g \text{ loves } d. \tag{1}$$

এর negation বার কর।

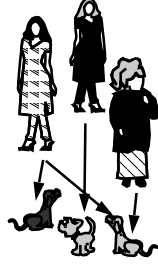
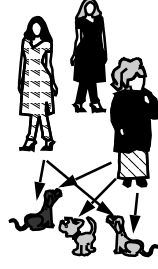
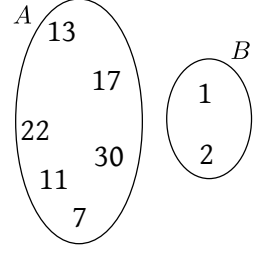



Fig 15 **Fig 16** **Fig 17**

Fig 15-এর ক্ষেত্রে কোনটা ঠিক, (**1**) না তার negation-টা? আর Fig 16-এর বেলায়?
SOLUTION: (**1**)-এর negation হল

$$\exists g \in GIRL \quad \forall d \in DOG \quad g \text{ does not love } d. \qquad (\mathbf{2})$$

অর্থাৎ এমন মেয়ে আছে যে কোনো কুকুরকেই দু চক্ষে দেখতে পারে না!
Fig 15-এর বেলায় (**1**) ঠিক, আর Fig 16-এর বেলায় (**2**)। ■

Exercise 10: নীচের বাক্যটার negation বার কর--

$$\forall a \in A \quad \exists b \in B \quad 3 \text{ divides } a - b.$$

এবার Fig 17 দেখে বল যে এখানে এই বাক্যটা ঠিক না কি এর negation-টা ঠিক। ■

Example 4: যদি বলি "Roll no. 1 একটা চশমাপরা মেয়ে নয়" তবে বুঝতে হবে যে সে হয় একটা মেয়ে নয়, আর নয় তো চশমা পরে না। তার মানে

"$\neg$ (চশমাপরা & মেয়ে)" হল "$\neg$(চশমাপরা) or $\neg$(মেয়ে)।"

যদি A, B যেকোনো দুটো শর্ত হয় তবে একই যুক্তিতে

$$"\neg(A \quad \& \quad B)" \text{ হবে } "\neg A \text{ or } \neg B".$$

■

Example 5: অনেক জায়গায় এমন সিট থাকে যেগুলো মেয়েদের আর বয়স্কদের জন্য সংরক্ষিত, অর্থাৎ যদি তুমি মেয়ে অথবা বয়স্ক হও তবে তুমি সেখানে বসতে পারবে। তাহলে বসতে পারবে না কারা? যারা মেয়ে নয় এবং বয়স্ক নয়। মেয়ে হওয়াকে যদি A বলি আর বয়স্ক হওয়াকে B, তবে--

$$"\neg(A \text{ or } B)" \text{ হবে } "\neg A \ \& \ \neg B".$$

লক্ষ কর negation করলে $\forall$ আর $\exists$ যেমন একটা অন্যটায় পরিণত হয়, তেমনি &-গুলো or হয়ে যায়, আর or-গুলো & হয়ে যায়। ■

Example 6: এক জন লোক এক দোকানদারের বিরুদ্ধে জোচ্চুরির অভিযোগ এনেছে, সে নাকি কথা দিয়ে কথা রাখে নি। বিচারক জানতে চাইলেন যে কি কথা দিয়েছিল সে দোকানদার। অভিযোগকারীর উত্তর--গতকাল বলেছিল যে, আগাম টাকা দিয়ে যান, কালকে তাহলে মাল পেয়ে যাবেন। বিচারকমশাই অংকের ভাষা পছন্দ করতেন, লিখলেন--

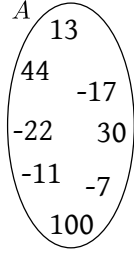
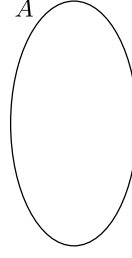



Fig 18 **Fig 19**

"গতকাল আগাম টাকা $\implies$ আজ মাল।"

এখন আমাদের অভিযোগকারীর অভিযোগ--"আমি গতকাল টাকা দিয়ে গিয়েছিলাম, কিন্তু আজ মাল পাই নি"। অংকের ভাষায়--

"গতকাল আগাম টাকা $\&$ $\neg$(আজ মাল)।"

নিঃসন্দেহে দোকানদার তার প্রতিশ্রুতি রাখে নি। দোকানদারের এবার কি শাস্তি হবে জানি না, কিন্তু এর থেকে আমরা একটা গুরুত্বপূর্ণ জিনিস জানলাম-- যদি A, B যে কোনো দুটো শর্ত হয় তবে

$$"\neg(A \implies B)" \text{ হল } "A \ \& \ \neg B."$$

■

Exercise 11: কেউ একজন Fig 18 দেখে দাবী করেছে যে S set-টার যে সব সংখ্যা positive তারা সবাই even, তার মানে

$$\forall x \in S (x > 0 \implies x \text{ is even}).$$

এর negation কি হবে? Fig 18 দেখে বল যে এ ক্ষেত্রে মূল বাক্যটা true না কি এই negation-টা! ■

1.2.9 Vacuously true

Fig 19-এ একটা set A দেখানো আছে। বলতে পারো এই set-এর জন্য নীচের বাক্যটা ঠিক না ভুল?

$$\forall a \in A \quad a > 0.$$

তুমি হয়তো Fig 19-এর দিকে চেয়ে খাবি খাবে, কারণ A তো বেমালুম ফাঁকা, মানে $A = \phi$! কিন্তু অংকের ভাষায় লেখা যে কোনো বাক্যই হয় ঠিক নয় ভুল, মাঝামাঝি কিছু হয় না। এক্ষেত্রে তবে উত্তরটা কি? উত্তর হল, $A = \phi$-এর জন্য বাক্যটা ঠিক! কেন, সেটা দুভাবে বোঝানো যায়--
এক, এই বাক্যটাকে তুমি একটা প্রতিশ্রুতি বলে ভাবতে পারো-- "যদি তুমি আমাকে একটা $a \in A$ দাও, তবে আমি দেখিয়ে দেব যে সেই a-টা > 0 হবে।" সুতরাং একটা $a \in A$ দেওয়ার দায়িত্বটা তোমার, আর $a > 0$ দেখানোর দায়িত্বটা আমার। যদি $A = \phi$ হয় তবে তুমি তোমার দায়িত্বই পালন করতে পারবে না, সুতরাং ব্যাপারটা আমার দায়িত্ব অবধি গড়াচ্ছেই না। তাই আমার প্রতিশ্রুতি ভঙ্গ হচ্ছে না। ঠিক যেমন এক বাবা ছেলেকে বলেছিলেন "যদি তুই ফার্স্ট হোস, তবে একটা সাইকেল কিনে দেব।" তা ছেলে যদি ফার্স্ট না হয়, তবে বাবারও সাইকেল কিনে দেওয়ার দায় থাকে না।
যদি এইভাবে বুঝতে অসুবিধা হয়, তবে আরেকভাবেও ভাবতে পারো। যদি বাক্যটা ভুল বলে দাবী কর, তবে তার negation-টাকে ঠিক বলে দাবী করছ। Negation-টা হল

$$\exists a \in A \quad a \leq 0.$$

তার মানে তুমি দায়িত্ব নিয়ে বলছ যে $A = \phi$-এর মধ্যে এমন একটা element আছে যেটা ≤ 0. অবশ্যই সেটা ঠিক নয়! তার মানে negation-টা ভুল, অতএব মূল বাক্যটাই ঠিক ছিল।

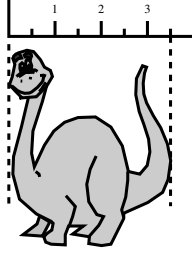
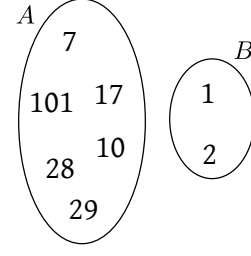



Fig 20 **Fig 21**

সুতরাং $A = \phi$ হলে $\forall a \in A$ দিয়ে শুরু সব বাক্যই ঠিক। একে বলে **vacuously true.**

Exercise 12: $A \subseteq B$ মানে হল A-এর যাবতীয় element-ই B-এর মধ্যেও আছে, অর্থাৎ $\forall x \in A \quad x \in B$. তাহলে এই বাক্যটা ঠিক না ভুল--$\phi \subseteq \{1, 2, 3\}$? ■

Exercise 13: "কলকাতায় যেসব ডাইনোসর ঘুরে বেড়ায় তারা সবাই লম্বায় ঠিক সাড়ে তিন ইঞ্চি।" ঠিক না ভুল? ■

1.3 প্রমাণ লেখা

অংকে আমাদের নানা জিনিস প্রমাণ করতে হয়। এই বইটারও অধিকাংশ জায়গা দখল করে আছে নানারকমের প্রমাণ। অংকের ভাষায় কোনো কিছুর প্রমাণ লেখার দুটো প্রধান কায়দা আছে, সে দুটো জানা থাকলে বইটা পড়তে সুবিধা হবে, এবং "বুঝতে পারছি, কিন্তু লিখতে পারছি না" জাতীয় সমস্যাও এড়ানো যাবে।

1.3.1 Direct proof

এই ধরণের প্রমাণ শুরু হয় যা প্রমাণ করতে হবে সেটাকে অংকের ভাষায় একটা বাক্য হিসেবে লিখে নিয়ে। যারা প্রমাণ লিখতে গিয়ে গুলিয়ে ফেলে তাদের প্রায় সবাইকেই দেখেছি যে প্রমাণের শুরুতে কি প্রমাণ করতে হবে সেটা অংকের ভাষায় লিখে নেয় না। অথচ এই লিখে নেওয়াটা যে কত গুরুত্বপূর্ণ তা বলে শেষ করা যায় না। পুরো প্রমাণের কাঠামোটা নির্ধারিত হয় ওই বাক্যটা দ্বারা। যতক্ষণ না তুমি এই বাক্যটা লিখতে পারছ, ততক্ষণ প্রমাণের পরবর্তী ধাপগুলোয় যাওয়ার চেষ্টা করার মানেই হয় না। হাজার হোক, তুমি কি প্রমাণ করতে চাও সেটাই যদি গুছিয়ে লিখতে না পরো, তবে আর প্রমাণ করবে কি? আমরা একটা খুব সহজ প্রমাণ দিয়ে ধাপগুলো দেখাচ্ছি। প্রমাণের এই কাঠামোটা সারা বইতে বার বার ব্যবহৃত হবে।

Example 7: Fig 21-এ দুটো set A আর B দেওয়া আছে। প্রমাণ কর যে, A-এর যে কোনো সংখ্যা থেকেই B-এর এমন একটা সংখ্যা বিয়োগ করা যায়, যাতে বিয়োগফলটা 3 দিয়ে ভাগ যায়।

SOLUTION: প্রথমে অংকের ভাষায় লিখে নিই--

To show

Target $\quad \forall a \in A \quad \exists b \in B \quad 3 \text{ divides } a - b.$ (*)

এইটা দেখানোই আমাদের লক্ষ্য, তাই বাঁদিকে ছোটো করে "Target" লিখে নিয়েছি। অংকের ভাষায় লেখা যে কোনো বাক্যেরই মূল চেহারা একই--পরপর কিছু $\forall$ আর $\exists$ সাজানো, তার পর সব শেষে একটা কোনো শর্ত। এইবার প্রমাণটাকে মনে কর যেন তোমার সঙ্গে আরেকজনের একটা খেলা। সব $\exists$-গুলো হল তোমার চাল, আর $\forall$-গুলো হল তোমার বিপক্ষের চাল। যেমন এখানে প্রথমে $\forall a \in A$ আছে, তার মানে তোমার বিপক্ষ প্রথমে একটা যে কোনো $a \in A$ তোমার দিকে ছুঁড়ে মারবে। এরপর আছে $\exists b \in B$, মানে তোমার চাল। তুমি a-টাকে খপাৎ করে ধরে নিয়ে সেটা কাজে লাগিয়ে পাল্টা একটা b বার করবে। যদি আরও $\forall, \exists$ থাকত তবে খেলাটা আরও চলত। কিন্তু এখানে এর পরেই শর্তটা আছে--3 divides $a - b$. এবার তোমার বিপক্ষের a আর তোমার b নিয়ে আম্পায়ার পরীক্ষা করে দেখবেন শর্তটা মিলছে কি না। যদি মেলে তোমার জিত (মানে প্রমাণ শেষ), না মিললে তোমার হার (অর্থাৎ প্রমাণ হল না)।

তুমি প্রমাণটা লেখার সময়ে এই খেলাটারই ধারা বিবরণী লিখবে। সেটা লেখার কায়দাটা এই রকম। প্রথমে তোমার প্রতিপক্ষ একটা $a \in A$ দিয়েছিল, সেটা A-এর যে কোনো element হতে পারে। তুমি এটা লুফে নেবে এবং লিখবে--

$\boxed{\forall a}$ Take any $a \in A$.

ওই বাঁদিকে ছোট্টো করে "$\forall a$" লিখেছি, ওটা খালি তোমার খেয়াল রাখার সুবিধার জন্য যে (*)-এর কতটা অবধি এসেছি। এবার আছে $\exists b \in B$, মানে তোমার চাল--একটা উপযুক্ত $b \in B$ বার করতে হবে। সব সময়ে একটু রাফ করে তবে চাল দেবে, যাতে শেষে আম্পায়ারের হাতে বেইজ্জত না হতে হয়। লক্ষ কর যে $b \in B$-টা তোমাকে এমনভাবে নিতে হবে যাতে $b - a$ সংখ্যাটা 3 দিয়ে ভাগ যায়। তার জন্য a-কে 3 দিয়ে ভাগ করলে যে ভাগশেষ (remainder)-টা থাকে সেটাকেই b হিসেবে নেওয়া যায়। চট্ করে দেখে নাও যে যদি $a = 7, 10, 28$ হয় তবে $b = 1$ নিলেই চলে। আর বাকীদের জন্য $b = 2$ নিতে হবে। এইটাই হল তোমার চাল। লিখে ফেলি--

Case 1: $a = 7, 10, 28$:

$\boxed{\exists b}$ Choose $b = 1$.

বাঁদিকের ওই ছোটো "$\exists b$"-টা মনে করিয়ে দিচ্ছে যে এটা তোমার চাল। লক্ষ কর যে "$\forall a$"-র বেলায় লিখেছিলাম "Take any a," আর "$\exists b$"-এর বেলায় লিখলাম "Choose $b = \cdots$." পরের কেসটা লেখার আগে লিখে নিই আম্পায়ারের সিদ্ধান্তটা (মনে রেখো, আম্পায়ারের কাজটাও আসলে তুমিই করবে!) আম্পায়ারের কাজ বোঝাতে বাঁদিকে ছোটো করে "Check" লিখেছি।

ওই "as required"-টা লিখে বুঝিয়ে দিলে যে জয়টা তোমারই হল। এবার একইভাবে অন্য কেসটা--

Case 2: $a = 17, 29, 101$:

$\boxed{\exists b}$ Choose $b = 2$.

Then $a - b \in \{17-2, 29-2, 101-2\} = \{15, 27, 99\}$.
So 3 divides $a - b$, as required.

লক্ষ কর আমরা বাঁদিকে দুবার "$\exists b$" আর "Check" লিখেছি, কারণ আমরা আমাদের চালটা দুটো কেসে ভেঙে দিয়েছি। ■

1.3.2 Proof by contradiction

অনেক ক্ষেত্রে direct proof করা কঠিন সে সব ক্ষেত্রে আমরা proof by contradiction করি। "Contradiction" মানে দুটো বক্তব্যের পরস্পরবিরোধিতা। প্রথমে কায়দাটা গল্প দিয়ে বোঝা যাক।

মনে কর ভারত-পাকিস্তান খেলা হচ্ছে। বিকেলে খেলা শেষ হয়েছে, কে জিতেছে তুমি জানো না। কিন্তু কোনো বাজীর শব্দ শোনা যাচ্ছে না। তা থেকে তুমি সিদ্ধান্ত করবে যে ভারত নির্ঘাত হেরেছে। কারণ যদি ভারত জিতত, তবে একথা নিশ্চিত যে তোমার পাড়ার ক্লাবের অত্যুৎসাহীরা বাজী ফাটাতই। কিন্তু বাস্তবে দেখাই যাচ্ছে যে তা হয় নি, সুতরাং নিশ্চয়ই ভারত জেতে নি।

যুক্তিপরম্পরাটা লক্ষ কর। "ভারত হেরেছে" এটা দেখানোর জন্য শুরু করলাম তার উল্টোটা ধরে-- "ভারত যদি জিতত তবে কি হত"। তবে বাজী ফাটত, কিন্তু এই সিদ্ধান্তের সাথে বাস্তব মিলছে না, অর্থাৎ ভারত জিতলে যা হত আর আসলে যা হয়েছে-- এ দুয়ের মধ্যে একটা contradiction রয়েছে। এ থেকে প্রমাণ হচ্ছে যে প্রথমে যেটা ধরে নিয়ে শুরু করেছিলাম সেটা নিশ্চয়ই ভুল ছিল, অর্থাৎ ভারত আসলে জেতে নি। এই কায়দায় যে কত অংক কষা যায়, তার আর ইয়ত্তা নেই।

Example 8: প্রমাণ কর যে কোনো integer-এর square যদি বিজোড় (odd) হয়, তবে সংখ্যাটাও odd হতে বাধ্য।

SOLUTION: প্রথম কাজ অংকের ভাষায় লেখা। যাবতীয় integer-এর set-কে অংকে $\mathbb{Z}$ দিয়ে বোঝানো হয়, মানে

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

তাই যেটা প্রমাণ করতে দিয়েছে সেটা হল--

> To show
> $$\forall n \in \mathbb{Z} \quad (n^2 \text{ is odd} \implies n \text{ is odd}).$$

প্রথমে ধরে নিই যে এটা ঠিক নয়।

> Let, if possible, this be false,

তার মানে তার negation-টা ঠিক, মানে--

> $$\exists n \in \mathbb{Z} \quad (n^2 \text{ is odd} \quad \& \quad n \text{ is even.})$$

এই ধাপটা করার জন্যই আমরা negation করা শিখেছিলাম। এখানে কিন্তু direct proof-এর মত "$\exists$ মানে আমার চাল" ভেবে বোসো না। এখানে আমরা এই negation-টা প্রমাণ করছি না, এটা আমরা ধরে নিয়েছি, এবং এ থেকে একটা contradiction-এ পৌঁছবার চেষ্টা করছি। একটু রাফে ভেবে নিই যে কিভাবে সেই উদ্দেশ্যসাধন করা যায়। যেহেতু n হল even, তার মানে n-কে দেখতে $2k$-র মত। অতএব $n^2 = 4k^2$, যেটা দিব্যি 4 দিয়ে ভাগ যায়, সুতরাং 2 দিয়ে তো যায়ই। তাহলে n^2 তো odd হতে পারে না, যেমনটা ধরে নিয়েছিলাম। সুতরাং contradiction! এই কথাটাই এবার গুছিয়ে লিখব--

> Then $n = 2k$ for some $k \in \mathbb{Z}$.
> So $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, which is even since $4k^2 = 2 \times 2k^2 (\Rightarrow\Leftarrow)$.

ওই "$\Rightarrow\Leftarrow$" চিহ্নটার মানে হল contradiction. এইবার যেকোনো proof by contradiction-এর উপসংহার লেখার একটা কায়দা আছে--

> So our original assumption was wrong. Hence, the given statement is true.

অর্থাৎ যা ধরে নিয়েছিলাম সেটা ভুল, অতএব যেটা গোড়ায় দেওয়া ছিল সেটাই ঠিক ছিল। ■

1.4 কয়েকটা সাবধানতা

অনেক সময়ে ছাত্রেরা অংকের ভাষা ব্যবহার করতে গিয়ে কয়েকটা ভুল করে। এখানে সে বিষয়ে একটা ছোটো আলোচনা করা হল।

1. যাবতীয় $\forall$ আর $\exists$ থাকবে বাক্যের গোড়াতে। অনেক সময়েই লোকে $\forall$-গুলোকে বাক্যের শেষে পাঠিয়ে দেয়। এটা অংকের ব্যাকরণ অনুযায়ী ঠিক নয়, কারণ এর ফলে একটা বাক্যের দুরকম মানে হয়ে যেতে পারে। যেমন যদি লিখি

   $$\exists d \in \text{DOG} \quad g \text{ loves } d \quad \forall g \in \text{GIRL},$$

   তার মানে কি বলতে চাইছি, সব মেয়েই কোনো না কোনো কুকুর ভালোবাসে? নাকি সব মেয়েই একটা বিশেষ কুকুরকে ভালোবাসে? আমাদের লেখা উচিত ছিল হয়

   $$\forall g \in \text{GIRL} \quad \exists d \in \text{DOG} \quad g \text{ loves } d$$

বা

$$\exists d \in \text{DOG} \quad \forall g \in \text{GIRL} \quad g \text{ loves } d.$$

দুঃখের বিষয় অনেক সময়ে বিভিন্ন ভালো বইতেও এই ভুলটা করা থাকে, এবং তার ফলে ছাত্রদের অসুবিধার সম্মুখীন হতে হয়।

2. $\forall$ বা $\exists$-এর পরে সবসময়ে একটা variable-এর নাম বসবে, কোনো ফর্মুলা নয়। কখনই যেন $\forall 2x$ কিংবা $\exists x^2$ লিখো না।

3. একই বাক্যে প্রতিটা $\forall$ এবং $\exists$-এর variable যেন আলাদা আলাদা হয়। অর্থাৎ এইধরণের বাক্য ভুল--

$$\forall x \in \text{GIRL} \quad \forall x \in \text{DOG} \quad x \text{ loves } x.$$

4. কোনো বাক্যে যা যা variable থাকবে, প্রত্যেকটাই কোনো না কোনো $\forall$ বা $\exists$-এর সঙ্গে যুক্ত থাকতে হবে। যেমন এই বাক্যটা ভুল--

$$\forall x \in \text{GIRL} \quad x \text{ loves } d.$$

এখানে d-টা কোথা থেকে এল মোটেই বোঝা যাচ্ছে না।

Answers

1. **(1)** ঠিক **(2)** ভুল **(3)** ঠিক **(4)** ঠিক **2.** **(1)** $\forall x \in A \quad x < 0$. **(2)** $\forall x \in A \quad x < 10$. **3.** **(1)** ঠিক **(2)** ভুল **(3)** ঠিক **4.** $\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a < b$. **5.** ঠিক, দুটোতেই 44 আছে। **6.** ঠিক। **7.** দ্বিতীয়টা,প্রথমটা। **8.** না। **9.** **(1)** সব পুরুষ মানুষই বাবা। ভুল। **(2)** সব nonnegative সংখ্যাই square number. ভুল। **(3)** কোনো সংখ্যা 6 দিয়ে ভাগ গেলে 2 এবং 3 দিয়ে ভাগ যায়। ঠিক। **10.** $\exists a \in A \quad \forall b \in B \quad 3$ does not divide $a - b$. Negation-টা ঠিক, $a = 30$ নাও। **11.** $\exists x \in S \quad (x > 0$ & x is odd). Negation-টা ঠিক। **12.** ঠিক, vacuously true. **13.** ঠিক!!! (Vacuously true, কারণ কলকাতায় কোনো ডাইনোসর ঘুরে বেড়ায় না।)

Chapter II
Sets and functions

To do: $X \cap A \neq \phi$ means $X \subseteq A^c$.

DAY 1
Sets and functions

1.1 বিভিন্ন set

আমরা এতক্ষণ উদাহরণ হিসেবে নানা রকম set ব্যবহার করেছি, যেমন MAN, GIRL, DOG, A, B ইত্যাদি। অংকের বিভিন্ন শাখায় বিভিন্ন ধরণের set নিয়ে কাজ করতে হয়। এই বইতে আমরা real analysis শিখব, তাই real analysis-এ যেসব set বেশী কাজে লাগে তাদের সঙ্গে পরিচিত হওয়া দরকার।

1.1.1 $\mathbb{R}$ ও তার কিছু subset

Real analysis হল real number-দের নিয়ে analysis. সুতরাং এখানে সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ হল real number-দের set, যাকে লেখে $\mathbb{R}$. (লক্ষ কর $\mathbb{R}$-এ কিন্তু ডবল দাঁড়ি)। এই set-এর element-দের মধ্যে integer-রা (মানে, পূর্ণসংখ্যারা) আছে--

$$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots,$$

fraction-রা আছে--

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{4}{7}, -\tfrac{100}{34}, \cdots,$$

বিভিন্ন square root, cube root ইত্যাদি আছে--

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \frac{1}{\sqrt[5]{34}}, \ldots,$$

এছাড়াও আছে π, e জাতীয় সংখ্যা বা তাদের মিলিয়ে মিশিয়ে তৈরি সংখ্যা যেমন π^e.

Fig 1

হাতের লেখায় $\mathbb{R}$ -এর্ কিছু subset:

$\mathbb{R}$ $\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$

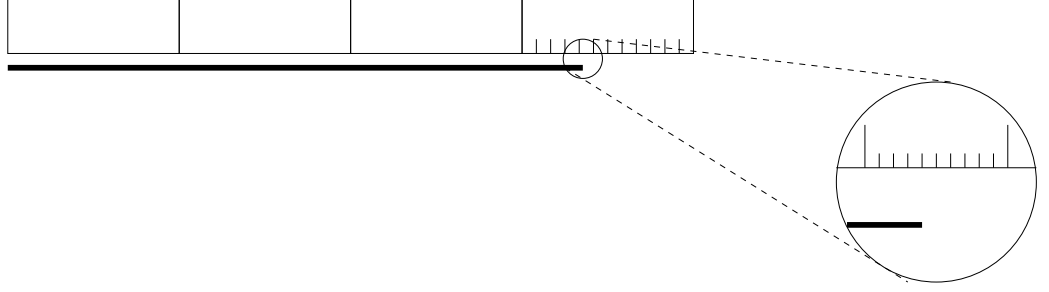



Fig 2

মোট কথা $\mathbb{R}$ হল একটা মস্ত চিড়িয়াখানা বিশেষ, যার মধ্যে অনেকরকম সংখ্যা আছে, তাদের কেউ বেশ সহজ দেখতে, আবার কেউ বেশ জমকালো। এতদিন পর্যন্ত যত রকম সংখ্যা তুমি দেখে এসেছো তারা সবাই $\mathbb{R}$-এর সদস্য। একমাত্র ব্যতিক্রম হল complex number-রা, যাতে $i = \sqrt{-1}$ আছে। যেমন $2 + 3i \notin \mathbb{R}$.
$\mathbb{R}$-এর বিভিন্ন subset-এর standard নাম আছে, যেমন $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ইত্যাদি। হাতের লেখায় কিভাবে এদের লিখতে হয় সেটা Fig 1-এ দেখিয়েছি। এবার এদের সংক্ষিপ্ত পরিচয় নেওয়া যাক--

- $\mathbb{N}$ হল যাবতীয় positive integer-দের set, মানে $\{1, 2, 3, ...\}$. এদের আরেক নাম **natural number.** ঐতিহাসিকভাবে দেখলে এই সংখ্যাগুলো মানুষ সবচেয়ে প্রাচীনকাল থেকে ব্যবহার করে আসছে। গুহামানবরা যখন ভেড়া চরিয়ে ফিরত তখন গুণে দেখতে হত যে যতগুলো সকাল বেলা বেরিয়েছিল, ঠিক ততগুলোই সন্ধ্যায় ফিরল কিনা। এইটা হচ্ছে মানব সভ্যতার ইতিহাসে অংকের প্রাচীনতম প্রয়োগের একটা, এবং এই কাজে খালি natural number ছাড়া আর কিছু লাগে না। লক্ষ কর যে এর মধ্যে 0 নেই, কারণ যার ভেড়া আদৌ নেই সে আর খামোখা কেন গুণতে যাবে? আর যার ভেড়া আছে, কিন্তু সন্ধ্যায় ফিরেছে খালি 0-টা সেও গুণতে না বসে, দৌড়ে ভেড়া খুঁজতে বেরোত।

- $\mathbb{Z}$ হল সব integer-এর set: $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$.

- যেসব সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে লেখা যায় (যেখানে p, q হল integer, এবং $q \neq 0$) তাদেরকে বলে **rational number,**[1] যেমন
$$\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{100}{32}, 0 = \frac{0}{1}, 2 = \frac{2}{1}.$$
এদের set-টাকে লেখে $\mathbb{Q}$. গুহামানবদের ভেড়া গোণার প্রয়োজনে যেমন natural number-দের উদ্ভব, তেমনি rational number-এর উৎপত্তি হল চাষীদের জমি মাপার জন্য। তার গল্পটা এইরকম-- ধর আমরা Fig 2-এর মত করে স্কেল দিয়ে মোটা লাইনটার দৈর্ঘ্য মাপছি। দৈর্ঘ্যটা হয়েছে তিন ফুট আর চার ফুটের মাঝামাঝি। তিন ফুটের পরের বাড়তি অংশটা মাপার জন্য আমরা স্কেলটাকে ইঞ্চিতে ভেঙে নেব। তাতেও যদি হিসেব পুরো না মেলে তবে হয়তো প্রতিটি ইঞ্চিকে $\frac{1}{10}$ ইঞ্চিতে ভাঙব, তাতেও না হলে আরো সূক্ষ্ম করে ভাগ করব। প্রতিদিনকার অভিজ্ঞতা থেকে মনে হয় যেন যথেষ্ট সুক্ষ্ম করে ভাগ করলে যে কোনো দৈর্ঘ্যই মাপা যায়। এই থেকে প্রাচীন গ্রীকদের বিশ্বাস ছিল যে সব দৈর্ঘ্যই হল $\frac{p}{q}$ আকারের, যেখানে q হল মোট কতভাগে স্কেলটাকে ভাগ করছি, আর p হল দৈর্ঘ্যটা কত ভাগ অবধি গেছে। ফুট-ইঞ্চির বেলায় $q = 12$, আর যেটা মাপছি সেটা যদি 3 ইঞ্চি হয় তবে $p = 3$. তার মানে দৈর্ঘ্যটা হল $\frac{3}{12}$ ফুট। তার মানে মনে করতে পারো যে rational number হল সেই সব দৈর্ঘ্য যাদেরকে স্কেল দিয়ে মেপে ফেলা যায় (প্রয়োজনমত স্কেলটাকে যত খুশী ছোটো ছোটো সমানভাগে ভাগ করে)। এমন কোনো দৈর্ঘ্য কি আছে যেটাকে এইভাবে মাপা যায় না? প্রাচীন গ্রীকরা মনে করত যে নেই। কারণ আমি যদি স্কেলটাকে যত খুশী ছোটো ভাগে ভাগ করতে রাজী থাকি তবে তো যেকোনো দৈর্ঘ্যই মাপতে পারা উচিত, যত সূক্ষ্মই হোক না কেন! কিন্তু আসলে তা নয়, এমন

[1]অনেক বইতে একটা বাড়তি শর্ত দেওয়া থাকে যে p, q-কে relatively prime হতে হবে, অর্থাৎ p আর q-এর কোনো common factor থাকবে না। এই শর্তটা কিন্তু দরকারী কিছু নয়। যেমন $\frac{6}{4}$ দিব্যি একটা rational number, যদিও 6 আর 4-এর common factor আছে। যদি আমরা কোনো rational number-কে পুরো কাটাকাটি করে লিখি তবে আর কোনো common factor থাকবে না।

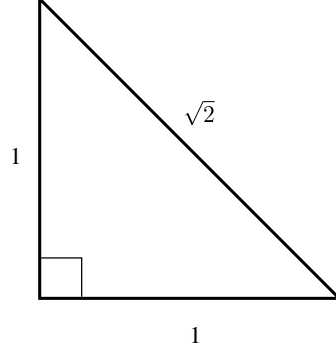



Fig 3

অনেক দৈর্ঘ্য আছে যাদের হাজার চেষ্টা করেও স্কেল দিয়ে মাপা সম্ভব নয়। এটা যখন গ্রীকরা প্রথম জানতে পারে তখন তাদের মধ্যে ভারী হুলুস্থুলু পড়ে গিয়েছিল। সে গল্পে এক্ষুণি আসছি।

- যেহেতু সব দৈর্ঘ্য স্কেল দিয়ে মাপা যায় না, তার মানে $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. যেসব real number মাপা যায় না, মানে rational নয় তাদের বলে irrational number. এদের set-এর কোনো আলাদা নাম নেই, আমরা লিখি $\mathbb{Q}^c$, মানে $\mathbb{Q}$-এর complement.

তোমরা হাইস্কুলে শিখেছিলে যে $\sqrt{2}$-কে $\frac{p}{q}$ আকারে লেখা যায় না, যেখানে p, q দুটো integer. তখন হয়তো ভেবেছিলে এটা নিয়ে মাথা ঘামাবার কি আছে, $\sqrt{2}$-কে $\frac{p}{q}$ আকারে লেখার চেষ্টাই বা লোকে খামোখা করবে কেন? তার উত্তর হল-- এইটাই প্রথম irrational number যেটার হদিশ মানুষ পেয়েছিল, এবং পেয়ে বেজায় ঘাবড়ে গিয়ে একটা আস্ত মানুষ খুন করে ফেলেছিল। কাহিনীটা এই রকম-- Pythagoras (পিথাগোরাস) নামে একজন গ্রীক পণ্ডিতের কথা তোমরা নিশ্চয়ই শুনেছ, সেই যাঁর নামে right angled triangle-এর সেই বিখ্যাত theorem-টা আছে--$a^2 + b^2 = c^2$. শোনা যায় যে, এটা নাকি আসলে তিনি আবিষ্কার করে নি, করেছিলেন তাঁরই এক শিষ্য, Hippasus. তা, এই আবিষ্কার-টা করে তিনি এক দিন $a = b = 1$ বসিয়ে দেখছিলেন। তাতে যে isosceles (সমদ্বিবাহু) right angled triangle-টা পাওয়া যায় (Fig 3) সেখানে $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. সেকালের অন্যান্য গ্রীকদের মত Pythagoras ও তাঁর শিষ্যরাও বিশ্বাস করতেন যে সব দৈর্ঘ্যকেই স্কেল দিয়ে মেপে ফেলা যায়, প্রয়োজন মত স্কেল-টাকে যথেষ্ট ছোটো ছোটো সমান ভাগে ভাগ করে নিয়ে। সুতরাং Hippasus বার করতে চাইছিলেন $\sqrt{2}$ দৈর্ঘ্যটাকে মাপতে p, q কত নেওয়া উচিত। এবং সেই কাজটা করতে গিয়েই আবিষ্কার করলেন যে এরকম কোনো p, q নেই। তার মানে যত সূক্ষ্ম স্কেলই নাও না কেন, $\sqrt{2}$ দৈর্ঘ্যটাকে কোনোদিনই মেপে ফেলা যাবে না। এই ব্যাপার দেখে Hippasus-এর তো চক্ষুস্থির! তিনি ভারী ব্যস্ত হয়ে কথাটা Pyhtagoras-কে জানালেন। সে আমলের লোকেরা ভীষণ কুসংস্কারাচ্ছন্ন হত। Pythagoras নিজেও তার ব্যতিক্রম ছিলেন না। তাঁদের একটা দলই ছিল নানা রকম তুকতাক, গুপ্ত যজ্ঞ-টজ্ঞ ইত্যাদি করার। আসলে সে সময়ে গণিতশাস্ত্র বলে আলাদা করে কিছু বোঝাই হত না। Pythagoras-এর দল একই সঙ্গে অংক, সঙ্গীতশাস্ত্র, জ্যোতিষ এবং নানান অন্ধ সংস্কারের চর্চা করত। সুতরাং $\sqrt{2}$-কে যে মাপা যায় না, সেই কথাটা তাদের চোখে শয়তানের কারসাজি বলে মনে হল। পাছে এই খবরটা রটে গেলে শয়তানের প্রভাব ছড়িয়ে পড়ে সেই ভয়ে Pythagoras-এর দলের সবাই শপথ করল যে কোনো মতেই এই সাংঘাতিক খবর ফাঁস করা চলবে না। কিন্তু বেচারী Hippasus নিজেই কিভাবে যেন খবরটা বাইরে বলে ফেলেছিল। তাই শোনা যায় যে Pyhtagorus নাকি একটা নৌকোয় করে বেড়াতে নিয়ে যাবার অছিলায় Hippasus-কে জলে ডুবিয়ে হত্যা করেন! সে আমলের ইতিহাস অবশ্য স্পষ্টভাবে লেখা নেই, তাই হত্যার প্রক্রিয়া বিষয়ে নানামত আছে।
যাই হোক, rational শব্দটার মানে হল "যুক্তিবোধসম্পন্ন"। $\sqrt{2}$ না হয় rational number নয়, কিন্তু এই কাহিনীর পরে মনে হয় Pythagoras নিজেও বড় একটা rational ছিলেন না!

1.1.2 Set-builder notation

আমরা কয়েকটা standard set-এর নাম শিখলাম--$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$. এদের মধ্যে $\mathbb{R}$ সবচেয়ে বড়, তার মধ্যে আছে $\mathbb{Q}$, তার মধ্যে $\mathbb{Z}$, সবার ভিতরে $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

এদের ব্যবহার করে আরও নানা set বানানো যায়। তাদের লেখার জন্য একটা পদ্ধতি আছে, যাকে বলে set-builder notation.

Example 1: যাবতীয় জোড় সংখ্যার set-কে লিখব

$$\{2n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

এর মানে এই set-এর element-রা হল $2n$ যেখানে n যেকোনো integer. ■

Exercise 1: যাবতীয় positive, odd number-এর set নীচের কোনটা?

$$\{2n-1 \ : \ n \in \mathbb{N}\} \text{ না } \{2n+1 \ : \ n \in \mathbb{N}\}?$$

■

Exercise 2: কোন set-টা বেশী বড়--$\mathbb{Z}$ নাকি $\{2n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$? ■

Example 2: "$5 \in \{n^2-1 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$" ঠিক না ভুল?

SOLUTION: তার মানে দেখতে হবে 5-কে n^2-1 আকারে লেখা যায় কি না, যেখানে $n \in \mathbb{N}$. যদি যেত তবে $5 = n^2-1$, বা $n^2 = 6$. কিন্তু 6 তো আর square number নয়, তাই এরকম কোনো n নেই। অর্থাৎ, $5 \not\in \{n^2-1 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. ■

Exercise 3: ঠিক না ভুল?
(1) $\frac{3}{4} \in \{\frac{n}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$. **(2)** $\sqrt{3} \in \{\sqrt{x} \ : \ x \in \mathbb{Q}^c, \ x > 0\}$. **(3)** $\mathbb{Q} = \{2x \ : \ x \in \mathbb{Q}\}$.
■

1.1.3 $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$

এইবার এমন একটা set-এর কথা শিখব যেটা আমাদের বার বার কাজে লাগবে--$\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$. এর element-রা হল $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ইত্যাদি। এই set-টার ছবিটা খুব ভালো করে খেয়াল রাখবে (Fig 4). লক্ষ কর পুরো set-টাই রয়েছে 0 থেকে 1-এর মধ্যে। 0 নিজে কিন্তু এই set-এ নেই। যেহেতু n যত বড় হয়, $\frac{1}{n}$ ততই ছোটো হতে হতে 0-র দিকে যায়, তাই দ্যাখো 0-র কাছে কি রকম ভীড় জমে উঠছে।

1.1.4 Intervals

আমরা যদি $\mathbb{R}$-কে একটা অসীম লম্বা লাইন বলে কল্পনা করি (যার কোনো শুরু শেষ নেই), তবে সেই লাইনের একটানা কোনো অংশকে বলে একটা interval. দুই প্রান্ত কি রকম দেখতে তার উপর নির্ভর করে নানা ধরণের interval হয় (Fig 5 দ্যাখো)--

Fig 4

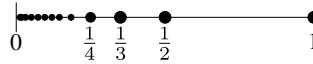
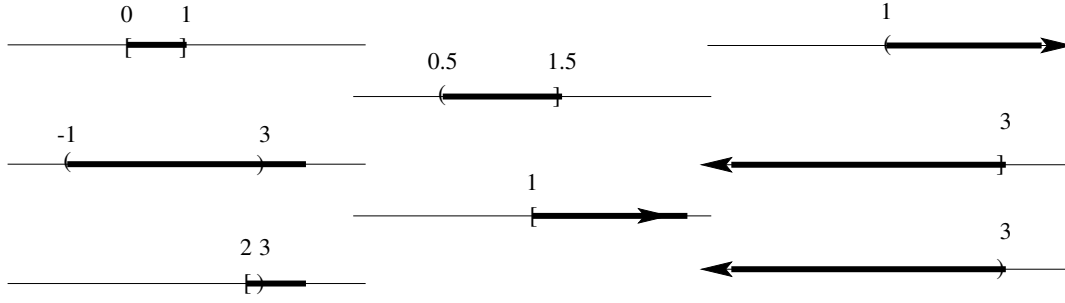



Fig 5

- $[0,1] = \{x \ : \ 0 \le x \le 1\}$
- $(-1,3) = \{x \ : \ -1 < x < 3\}$
- $[2,3) = \{x \ : \ 2 \le x < 3\}$
- $(0.5, 1.5] = \{x \ : \ 0.5 < x \le 1.5\}$
- $[1,\infty) = \{x \ : \ 1 \le x\}$
- $(1,\infty) = \{x \ : \ 1 < x\}$
- $(-\infty,3] = \{x \ : \ x \le 3\}$
- $(-\infty,3) = \{x \ : \ x < 3\}$
- $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$

কিন্তু $[-\infty,2], [-\infty,2)$ বা $[1,\infty], (1,\infty]$ বলে কিছু হয় না।

Exercise 4: চারটে set দিলাম--$\{0,1\}, [0,1], (0,1), (0,1], [0,1)$. বল যে $0, \frac{1}{2}$ আর 1 সংখ্যাগুলো এদের কাদের মধ্যে আছে আর কাদের মধ্যে নেই? ■

Exercise 5: এদের মধ্যে কোনগুলো $\mathbb{R}$-এর subset নয়? $[-\infty,2], (0,2], (1,2,3), \{0,1,...\}, \{1,2)$. ■

Exercise 6: এদের মধ্যে কোনটা বা কোনগুলো আসলে $[0,2]$?

$$[0,1)\cup(1,2], \quad [0,1]\cup(1,2], \quad [0,1)\cup[1,2], \quad [0,1]\cup[1,2]?$$

■

বিভিন্ন set-এর ছবি আঁকতে পারলে real analysis শেখা সহজ হয়।

Example 3: ছবি আঁকো--$(0,1]\cup\{2\}$.

SOLUTION: উত্তরটা দেখিয়েছি Fig 6-এ। ■

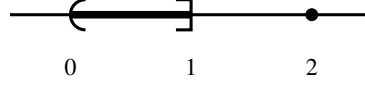



Fig 6

Exercise 7: ছবি আঁকো--
(1) $(0,1]\cup\{-2,2\}$ **(2)** $(0,1)\cup(1,2)$ ■

1.1.5 Neighbourhood

এবার আমরা একটা নতুন চিহ্ন শিখব যেটা আমাদের সারা বইতে ভীষণ কাজে লাগবে। যখন আমরা লিখব $N(a,r)$ তার মানে হল $(a-r,a+r)$ এই interval-টা। এখানে $a\in\mathbb{R}$ যা খুশী হতে পারে, কিন্তু $r>0$ হতেই হবে।

Example 4: $N(-2,3)$ মানে কি? 1 সংখ্যাটা কি $N(-2,3)$-এর ভিতরে না বাইরে?

SOLUTION: $N(-2,3)$ মানে হল $(-2-3,-2+3)$ অর্থাৎ $(-5,1)$. যেহেতু 1-এ গোল ব্র্যাকেট রয়েছে, তাই 1 এর মধ্যে পড়ে না-- $1\not\in N(-2,3)$. ■

Example 5: $N(2,-3)$ মানে কি?

SOLUTION: কিচ্ছু মানে নেই, দ্বিতীয় সংখ্যাটাকে positive হতে হবে। একইভাবে $N(2,0)$-রও কোনো অর্থ হয় না! ■

Exercise 8: ঠিক না ভুল?

1. $0\in N(3,4)$.
2. $0\in N(4,3)$.
3. যদি $a\in\mathbb{R}$ আর $r>0$ হয় তবে $a\pm\frac{r}{2}\in N(a,r)$.
4. যদি $a<0$ হয় তবে $0\in N(a,-a)$.

■

লক্ষ কর যে $N(a,r)$-এর কেন্দ্রে আছে a. যে সব সংখ্যা a থেকে r দূরত্বের ভিতরে আছে তাদের নিয়েই তৈরী $N(a,r)$ set-টা। ঠিক যেন a হল জমিদার যার শাসন r দূরত্বের মধ্যে খালি কাজ করে। তাহলে $N(a,r)$ হল সেই জমিদারের এলাকা। ইংরাজীতে বলব $N(a,r)$ is a **neighbourhood** of a.

Exercise 9: ধর $a,b\in\mathbb{R}$ আর $r>0$. তবে এই কথাটা ঠিক না ভুল বল--

$$b\in N(a,r)\iff |a-b|<r.$$

■

মনে রেখো যে a নিজে সব সময়েই $N(a,r)$-এর মধ্যে আছে। যদি a-কে বাদ দিয়ে দিই তবে একটা ফুটো হয়ে যাবে (Fig 7). যেটা পড়ে থাকবে সেটা হল দুটো interval-এর union. যেমন $N(2,1)$ মানে $(1,3)$, এর থেকে 2-কে মুছে

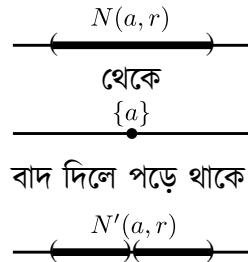



Fig 7

ফেললে রইল $(1,2)\cup(2,3)$. একে আমরা বলব $N'(2,1)$. একইভাবে $N'(a,r)$ বলতে বুঝব $(a-r,a)\cup(a,a+r)$. যেহেতু $N(a,r)$ থেকে a-কে delete করে (অর্থাৎ মুছে ফেলে) $N'(a,r)$-কে পেলাম, তাই $N'(a,r)$-কে বলে a-র একটা **deleted neighbourhood**.

1.1.6 Finite আর infinite set

$\{1,2,3\}$ বা $\{-3,12,500,3000\}$ বা $\{1,\ldots,100000\}$ হল finite set-এর উদাহরণ। এই রকম set-এ কতগুলো element আছে গুণে শেষ করা যায়। কিন্তু $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ হল একটা infinite set. কারণ যতই গোণার চেষ্টা কর, কিছুতেই শেষ করতে পারবে না, চলতেই থাকবে, চলতেই থাকবে।

Exercise 10: পৃথিবীতে যত মানুষ আছে তাদের set কি finite না infinite? ■

Example 6: $(0,1)$ কি একটা finite set?

SOLUTION: উত্তর হল-- না। এর মধ্যে $\frac{1}{2}$ আছে, $\frac{1}{3}$ আছে, $\frac{1}{4}$ আছে, এবং এইভাবে চলতে চলতে যাবতীয় $\frac{1}{n}$-জাতীয় সংখ্যাই আছে $(n\in\mathbb{N})$. সুতরাং গুণে শেষ করার কোনো প্রশ্নই নেই! ■

Exercise 11: $[1,1.1]$ কি একটা finite set? ■

Exercise 12: $A\subseteq B$. তাহলে নীচের কথাগুলো ঠিক না ভুল বল--

1. A finite $\implies$ B finite.
2. A infinite $\implies$ B infinite.
3. B finite $\implies$ A finite.
4. B infinite $\implies$ A infinite.

■

1.1.7 Bounded আর unbounded set

এইবার দুটো infinite set-কে ভালো করে লক্ষ কর--$\mathbb{N}$ আর $(0,1)$. সাধারণতঃ infinite set ভাবতেই আমাদের মনে যে ধারণাটা জন্মায় সেটা হল--একটা মস্ত বড় set. এখন $\mathbb{N}$-কে দেখলেই মনে হয় মস্ত বড় জিনিস, $1,2,3,\ldots$ থেকে শুরু করে যত বড় বড় integer ওর মধ্যে আছে। সুতরাং ওটাকে infinite set বলে মেনে নিতে কষ্ট হয় না। কিন্তু $(0,1)$ তো ছোট্টো একটুখানি set, 0 থেকে 1-এর মধ্যেই ওর সব জারিজুরি শেষ, সেটাকে infinite set বলে ভাবতে অনেক ছাত্রছাত্রীরই

বেশ অসুবিধা হয়। তোমারও যদি এই অসুবিধা হয় তবে মনে রেখো যে একটা set-এর infinite কিংবা finite হওয়া নির্ভর করছে তাতে কতগুলো element আছে তার উপরে, সেই element-গুলো কতটা জায়গার উপর ছড়িয়ে আছে তার উপরে নয়। $(0,1)$-এ infinitely many সংখ্যা আছে, কিন্তু তারা আছে খুব গাদাগাদি করে, তাই অল্প জায়গায় এঁটে গেছে। $\mathbb{N}$-এর element-গুলো আছে ফাঁক ফাঁক হয়ে ছড়িয়ে।

একটা set কতটা জায়গা জুড়ে ছড়িয়ে আছে সেটাও অবশ্য অংকে একটা গুরুত্বপূর্ণ জিনিস। এর উপর নির্ভর করে দুরকম set হয়--bounded আর unbounded. এখানে $(0,1)$ একটা bounded set, কারণ এর সব element-ই নীচে 0 থেকে উপরে 1-এর মধ্যে আছে। আমরা বলব যে 0 হল এই set-টার একটা **lower bound,** আর 1 হল একটা **upper bound.** এখানে দুবারই "একটা" লিখেছি, কারণ 0-র থেকে কম যে কোনো সংখ্যা নিই (ধর, -30) আর 1-এর চেয়ে বড় যে কোনো সংখ্যা নিই (ধর, 2) তবে আমরা অবশ্যই বলতে পারি যে $(0,1)$-এর সব সংখ্যা -30 থেকে 2-এর মধ্যে আছে, মানে -30-ও একটা lower bound, এবং একইভাবে 2-ও একটা upper bound.

একইভাবে 3 এবং -3 হল $(0,1)$-এর আরও একটা করে upper ও lower bound. লক্ষ কর 3 আর -3 হল পরস্পরের negative. যদি কোনো positive সংখ্যা এমন হয় যে সেটা একটা set-এর upper bound, আবার তার negative-টা ওই একই set-এর lower bound, তবে ওই positive সংখ্যাটাকে আমরা বলি set-টার একটা bound. যেমন $(0,1)$-এর একটা bound হল 3. তার মানে bound জানা থাকলে upper এবং lower bound দুটোই পাওয়া যায়। এরকম set-কে bounded বলে।

DEFINITION: Bounded set

A set $A \subseteq \mathbb{R}$ is called bounded if

$$\exists M > 0 \forall a \in A \quad -M \leq a \leq M.$$

Any such $M > 0$ is called a bound of A.

যদি $A \subseteq \mathbb{R}$ bounded না হয় তবে তাকে বলব **unbounded set,** যেমন $\mathbb{N}$.

Exercise 13: এদের মধ্যে কারা bounded আর কারা unbounded?

$$\mathbb{R}, \quad (1,100), \quad [0,\infty), \quad \mathbb{Q}, \quad \{(-1)^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}, \quad \{n^{-1} \ : \ n \in \mathbb{N}\}, \quad \{n^2 \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

■

Exercise 14: $A \subseteq B$. তাহলে নীচের কথাগুলো ঠিক না ভুল বল--

1. A bounded $\implies$ B bounded.
2. A unbounded $\implies$ B unbounded.
3. B bounded $\implies$ A bounded.
4. B unbounded $\implies$ A unbounded.

■

Exercise 15: ধরো $A \subseteq \mathbb{R}$. নীচের চারটে বাক্যের মধ্যে ঠিক দুটোই সঠিক। কোন দুটো?

1. A যদি finite হয় তবে bounded হতে বাধ্য।

2. A যদি bounded হয় তবে finite হতে বাধ্য।

3. A যদি infinite হয় তবে unbounded হতে বাধ্য।

4. A যদি unbounded হয় তবে infinite হতে বাধ্য।

■

Exercise 16: $\{-3, 1, 2\}$-র সবচেয়ে ছোটো upper bound কত? সবচেয়ে বড় lower bound কত? সবচেয়ে ছোটো bound কত? ■

Exercise 17: বল তো $M = 5$ কি $A = \phi$-এর একটা bound? ■

Exercise 18: $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ কি একটা finite set? এটা কি একটা bounded set? ■

1.1.8 Set arithmetic

দুটো set A, B দেওয়া থাকলে তাদের থেকে আমরা বিভিন্ন নতুন set বানাতে পারি, যেমন $A \cup B, A \cap B, A^c, B^c, A^c \cap B$ ইত্যাদি। Union, intersection বা complement বার করা যে কোনো set-এর ক্ষেত্রেই করা যায়। কিন্তু যদি $A, B \subseteq \mathbb{R}$ হয় তাহলে তাদের যোগ বিয়োগ ইত্যাদিও করতে পারি।
ধর $A = \{1, 2, 4\}$. যদি আমরা এর প্রত্যেকটা element-এর negative নিই, তবে একটা নতুন set পাব--$\{-4, -2, -1\}$. একে বলব $-A$. একইভাবে যদি $B = [-2, -1)$ হয়, তবে $-B = (1, 2]$ হবে। মানে একটা set দিয়ে যদি তার negative বার করতে বলে, তবে তুমি ধরে ধরে তার যাবতীয় element-এর চিহ্ন উল্টে দেবে। তার মানে যদি $C \subseteq \mathbb{R}$ যে কোনো একটা set হয়, তবে

$$-C = \{-x \ : \ x \in C\}.$$

একইভাবে যদি $A, B \subseteq \mathbb{R}$ দিয়ে $A + B$ বার করতে বলে, তবে তুমি A-র প্রত্যেকটা সংখ্যার সাথে B-র প্রত্যেকটা সংখ্যা যোগ করবে, এরকম করে যত যোগফল পাবে, তাদের set-টাকেই বলে $A + B$, মানে--

$$A + B = \{a + b \ : \ a \in A, \quad b \in B\}.$$

Example 7: $A = \{1, 2\}$ আর $B = \{20, 21, 40\}$ হলে $A + B$ কি হবে?

SOLUTION: A-র সবার সঙ্গে B-র সবাইকে যোগ করলে হয়

$$\begin{aligned} 1 + 20 = 21, \quad 1 + 21 = 22, \quad 1 + 40 = 41, \\ 2 + 20 = 22, \quad 2 + 21 = 23, \quad 2 + 40 = 42. \end{aligned}$$

তার মানে $A + B = \{21, 22, 23, 41, 42\}$. লক্ষ কর যে 22 সংখ্যাটা দুভাবে এসেছিল, $1 + 21$ হিসেবে, আবার $2 + 20$ হিসেবে। কিন্তু একটা set-এ প্রতিটা element একবারই থাকে, তাই $A + B$ লেখার সময়ে আমরা 22 সংখ্যাটা এক বারই লিখেছি। ■

Example 8: যদি $A = (0, 1)$ আর $B = (-1, 0)$ হয় তবে $A + B$ বার কর।

SOLUTION: এখানে প্রথমে যেকোনো একটা $a \in A$ আর যেকোনো একটা $b \in B$ নিই। তার মানে a, b হল যেকোনো দুটো সংখ্যা যাতে

$$\begin{aligned} 0 &< a < & 1, \\ -1 &< b < & 0 \end{aligned}$$

হয়। সুতরাং, যোগ করে বলতে পারি যে $a+b$ হল যে কোন সংখ্যা যার জন্য

$$-1 < a+b < 1$$

হবে। সুতরাং

$$A+B = (-1,1).$$

■

একটা জিনিস লক্ষ কর। এখানে কিন্তু $B = -A$ ছিল, কিন্তু তার বলে কিন্তু $A+B$ কিন্তু মোটেই শূন্য হল না! সংখ্যার যোগ-বিয়োগের সঙ্গে set-এর যোগ-বিয়োগের এটা একটা পার্থক্য!

Exercise 19: যদি $A = \{1,2\}$ হয় তবে $B = -A$ বার কর, এবং তারপর $A+B$ বার করে দ্যাখো কি হয়। ■

1.1.9 de Morgan's laws

Set নিয়ে দুটো খুব কাজের সূত্র আছে, তাদের বলে de Morgan's laws–

de Morgan's laws

যদি A, B যে কোনো দুটো set হয় তবে

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \text{ এবং } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

ছবিতে দেখালে Fig 8 আর Fig 9-এর মত।

Fig 8

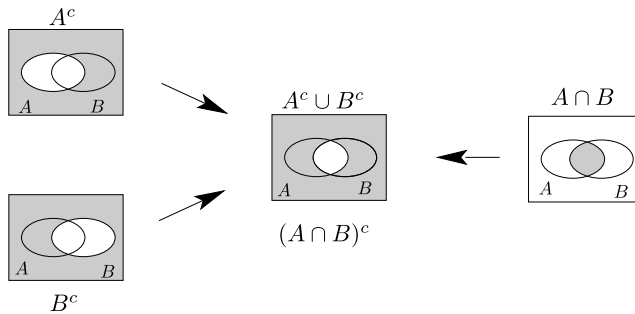
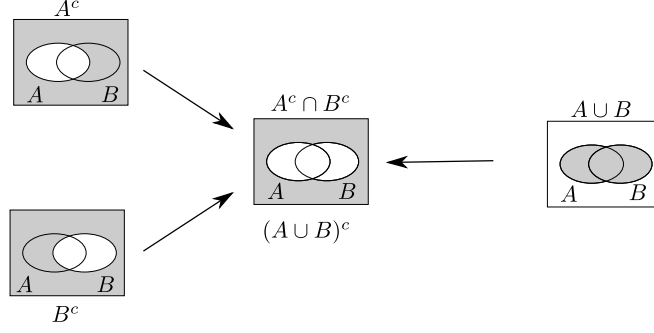



Fig 9

ব্যাপারটা কি বোঝার জন্য একটা উদাহরণ নাও--ধর, A হল যাবতীয় 1st year ছাত্রছাত্রীর set, আর B হল যাবতীয় Math (hons)-দের set. কোথাও একটা অংকের অনুষ্ঠান হচ্ছে, সেখানে খালি 1st year math (hons)-রাই অংশ নিতে পারবে। তার মানে তারা যারা একই সঙ্গে A এবং B-তে আছে-- $A \cap B$. তাহলে অংশ নিতে পারবে না কারা? উত্তর হল $(A \cap B)^c$. এদের হয় math (hons) নেই নয়তো 1st year নয়, মানে $A^c \cup B^c$. সুতরাং সব মিলিয়ে হল--$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Exercise 20: একটা চাকরীতে খালি তারাই আবেদন করতে পারে যাদের math (hons) বা physics (hons) আছে। তাহলে কারা আবেদন করতে পারবে না? যদি A হয় math (hons)-দের set, আর B হয় physics (hons)-দের set, তবে এ থেকে কি তুমি de Morgan-এর দ্বিতীয় সূত্রটা পেতে পারো? ■

আমরা de Morgan's law দুটো লিখেছি খালি দুটো set-এর জন্য। একই যুক্তি যে কোনো সংখ্যক set-এর ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য, যেমন তিনটে set হলে

$$(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c) \text{ আর } (A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c.$$

1.1.10 Collection of sets

অল্প কয়েকটা set নিয়ে কাজ করলে তাদের A, B, C ইত্যাদি নাম দেওয়া চলে। কিন্তু 100-টা set নিয়ে অংক কষতে হলে বর্ণমালায় কুলোবে না, তখন আমরা $A_1, A_2, ...A_{100}$ এইভাবে লিখি। এদেরকে একসঙ্গে আমরা লিখতে পারি

$$\{A_i \ : \ i \in \{1, 2, ..., 100\}\}.$$

একে বলে একটা collection of sets. লক্ষ কর এখানে প্রতিটা set-কে লিখেছি A_i হিসেবে। এই ছোটো করে লেখা i-টাকে বলে index. এই index-টা যা যা value নিতে পারে তাদের set-টা হল $\{1, 2, ..., 100\}$. একে বলে **index set.** যদি index set-টার নাম দিই I, তবে collection-টাকে লিখতে পারি

$$\{A_i \ : \ i \in I\}. \qquad (*)$$

এইভাবে লেখার সুবিধা হল--আমাদের collection-এ যদি infinite-সংখ্যক set-ও থাকে, তবেও আমরা একইভাবে (*) লিখতে পারতাম, খালি I-টা সেক্ষেত্রে একটা infinite set হত। তাই আমরা যদি এমন কিছু লিখতে চাই যা finite বা infinite যে কোনো collection of sets-এর জন্যই সমভাবে প্রযোজ্য, তবে আমরা (*)-এর মত করে index set ব্যবহার করে লিখি। একে বলি arbitrary collection. এখানে "arbitrary" মানে "যা খুশী", finite বা infinite.
যদি একটা arbitrary collection নিই, তবে সেই collection-এর সব set-এর union লিখি এইভাবে--

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

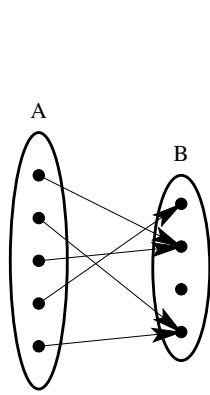
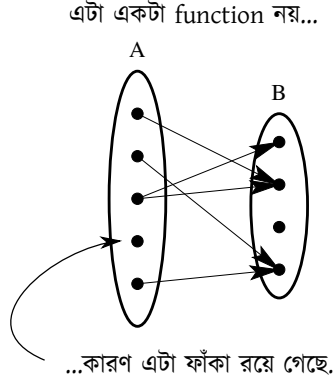
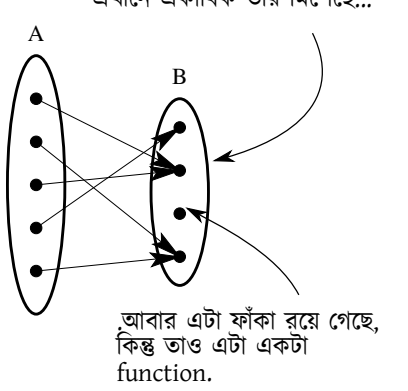



Fig 10 **Fig 11** **Fig 12**

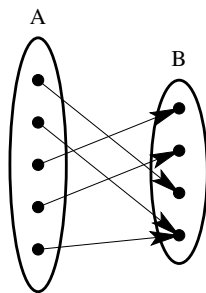
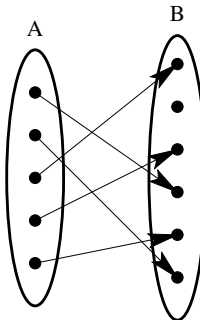
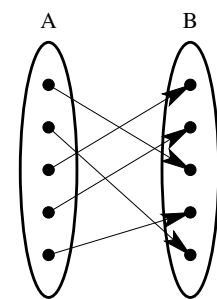
আর intersection লিখি এইভাবে--

$$\bigcap_{i\in I} A_i.$$

1.2 Functions

Function কাকে বলে সেটা আমাদের অজানা নয়। একটা function-কে বিভিন্নভাবে এঁকে বা লিখে বোঝানো যায়। সেগুলো নানা সময়ে কাজে লাগে। তাই সেগুলোকে একটু ঝালিয়ে নেওয়া যাক। Fig 10-এ একটা function-কে তীরচিহ্ন দিয়ে এঁকে দেখানো আছে। এখানে A-কে বলে domain আর B-কে বলে codomain. আমরা লিখি $f : A \to B$. লক্ষ কর A-র প্রতিটি বিন্দু থেকে একটা এবং ঠিক একটাই তীর বেরিয়েছে। তা না হলে $f : A \to B$ একটা function হত না (Fig 11). কিন্তু যত কড়াকড়ি সব A-র দিকে, B-র দিকে কিন্তু কোনোই বাধানিষেধ নেই (Fig 12).
যদি আমরা B-র দিকেও নিয়ম চাপাই যে কোনো element ফাঁকা থাকতে পারবে না, তবে যে সব function পাব তাদের বলে **onto function** বা (গালভরা ভাষায়) **surjective** function. (Fig 13). যদি আমরা এই নিয়মটা না রেখে খালি চাই যে B-র কোনো element-এ একাধিক তীর আসতে পারবে না তবে পাব **one-to-one** function বা **injective** function (Fig 14). যদি দুটো নিয়মই একসঙ্গে চাপাই (অর্থাৎ যদি B-র প্রতিটা element ঠিক একটা করেই তীর আসে) তবে পাব **bijective** function বা সংক্ষেপে **bijection** (Fig 15).
যে সব function-এর domain-টা ছোটোখাটো, তাদেরকে তীর চিহ্ন এঁকে বোঝানো সহজ। Real analysis-এ আমরা অনেক সময়ে এমন সব function নিয়ে কাজ করব যাদের domain হল infinite set. এসব ক্ষেত্রে সাধারণতঃ function-টাকে ফর্মুলা দিয়ে লিখলে সুবিধা হয়, যেমন $f(x) = x^2$. সমস্যা হল, অনেকেই ফর্মুলা দিয়ে লেখার সময়ে domain আর codomain-এর কথা বেমালুম ভুলে যায়। যেমন যদি বলি

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ is defined as $f(x) = x^2$,

Fig 13 **Fig 14** **Fig 15**

তবে কিন্তু $f(2) = 2^2 = 4$ লিখলে ভুল হবে, কারণ $2 \notin [0,1]$. এখানে $f(2)$ হল undefined.
অনেক সময়ে একটা function লেখার জন্য একাধিক ফর্মুলা লাগে। তখন আমরা এভাবে লিখি--

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \in (0,1) \\ 2 & \text{if } x = 1 \\ 2 - x & \text{if } x \in (1,2) \end{cases}$$

লক্ষ কর যে এই function-টার domain হল $(0,2)$.
একাধিক ফর্মুলা লেখার সময়ে যেন একই x-এ দুরকম value দিয়ে ফেলো না। একটা উদাহরণ এইরকম--

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{if } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

এখানে $f(1)$ কি হবে? "$x = 1$" কেসটা "$0 \leq x \leq 1$" আর "$1 \leq x \leq 2$" দুটোতেই পড়ে। প্রথম ফর্মুলাটা লাগালে পাবে $2 \times 1 = 2$, আর দ্বিতীয়টা থেকে পাবে 1. কিন্তু $f(1)$-এর তো আর একই সঙ্গে দুটো value হতে পারে না (একই x থেকে দুটো তীর বেরোতে পারে না)। তার মানে এই f-টা আসলে একটা function-ই নয়!

1.2.1 চট্ করে গ্রাফ আঁকা

ফর্মুলা দিয়ে অনেক কাজ হয় বটে, কিন্তু ছবি আঁকার মজাই আলাদা। Function-এর ছবি আঁকার সবচেয়ে ভালো কায়দা হল গ্রাফ আঁকা। কোনো function-এর ফর্মুলা দেওয়া থাকলে তার গ্রাফ আঁকার নানা রকম কায়দা আছে। একটা কায়দা তো আমরা সবাই জানি-- x-এর অনেকগুলো value নিয়ে প্রথমে $f(x)$-এর value-র একটা তালিকা তৈরী করা, এবং তারপর একটার পর একটা বিন্দু বসিয়ে লাইন দিয়ে যোগ করা। এই কায়দাটা বড্ড সময়সাপেক্ষ এবং x-এর কি কি value নিলে ঠিক হবে সেটা বোঝাও কঠিন। Real analysis-এ ভীষণ সূক্ষ্ম, নিখুঁত গ্রাফ আঁকার প্রয়োজন হয় না। চট্ করে গ্রাফটার একটা আদল পাওয়াটাই বড় কথা। তাই তালিকা বানিয়ে বিন্দু বসানো আমাদের পোষাবে না। আমরা এখানে তাই একটা সহজ চট্‌জলদি কায়দা শিখব, যার সাহায্যে অনেক গ্রাফই সহজে আঁকা যাবে।
এর জন্য প্রথম কাজ হল কিছু সহজ function-এর গ্রাফ কি করে আঁকতে হয় মনে রাখা। যদি $f(x) = mx + c$ জাতীয় কিছু হয়, তবে তার গ্রাফ হবে একটা সরলরেখা। সুতরাং গ্রাফের উপর যেকোনো দুটো point বার করে তাদের সংযোজক সরলরেখাটা আঁকলেই হবে।
আর মনে রেখো Fig 16)-এ দেখানো গ্রাফগুলো।
এবার শিখব কি করে একটা সহজ গ্রাফকে একটু একটু করে বদলে জটিল গ্রাফে পৌঁছনো যায়।

Example 9: $f(x) = \sin(2x+1)$-এর গ্রাফ আঁকো।

SOLUTION: প্রথমে শুরু করব $\sin x$-এর গ্রাফ এঁকে (Fig 17).
তারপর $\sin(x+1)$-এর গ্রাফ পাব এটাকে horizontal দিকে 1 ঘর বাঁদিকে সরিয়ে (Fig 18). মনে রেখো--

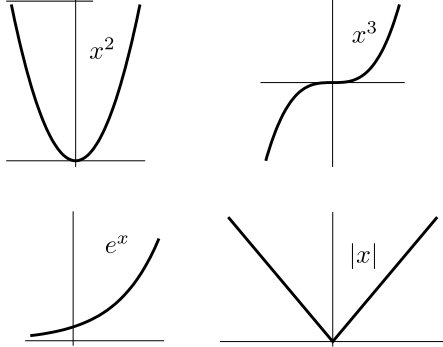
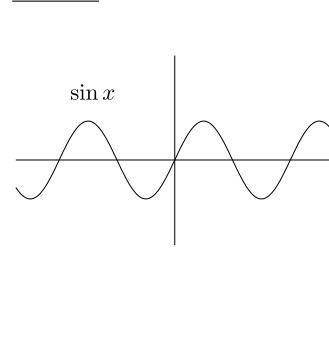
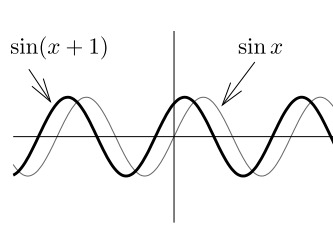
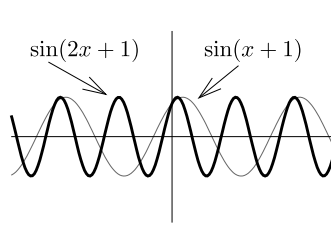
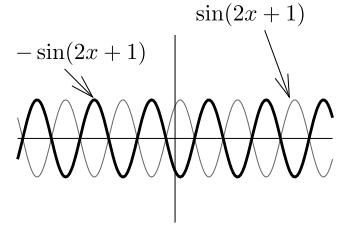



Fig 18 **Fig 19** **Fig 20**

Rule 1 যেকোনো $f(x)$-এর গ্রাফকে a ঘর বাঁদিকে সরালে সবসময়ে $f(x+a)$-এর গ্রাফ পাওয়া যায়।

এখানে $a = 1$.
এবার এই গ্রাফটাকে যদি চওড়ার দিকে অর্ধেক করে দিই তবে পাব $\sin(2x+1)$-এর গ্রাফ (Fig 19). মনে রেখো--

Rule 2 যেকোনো $f(x)$-এর গ্রাফকে চওড়ার দিকে k ভাগ করে দিলে সবসময়ে $f(kx)$-এর গ্রাফ পাওয়া যায়।

এখানে $k = 2 > 1$. তাও গ্রাফটা horizontal দিকে সংকুচিত হয়ে গেছে। ■

Exercise 21: $(x-1)^3$ আর $\frac{1}{2x+3}$-এর গ্রাফ আঁকো। ■

Example 10: এবার $f(x) = -2\sin(2x+1) + \frac{1}{2}$-এর গ্রাফ আঁকো।

SOLUTION: $\sin(2x+1)$-এর গ্রাফ পর্যন্ত তো আগেই এঁকেছি (Fig 19). সেই গ্রাফটাকে x-axis-এ প্রতিফলিত করালে (মানে x-axis-এর উপরের জিনিস নীচে, আর নীচের জিনিস উপরে করলে) পাবে $-\sin(2x+1)$-এর গ্রাফ (Fig 20), কারণ--

Rule 3 যেকোনো $f(x)$-এর গ্রাফকে x-axis-এ reflect (অর্থাৎ প্রতিফলন) করালে সবসময়ে $-f(x)$-এর গ্রাফ পাওয়া যায়।

এবার এই গ্রাফটাকে vertically দ্বিগুণ লম্বা করে দাও, পাবে $-2\sin(2x+1)$-এর গ্রাফ (Fig 21). কেন? কারণ--

Rule 4 যেকোনো $f(x)$-এর গ্রাফকে vertical দিকে টেনে k গুণ লম্বা করে দিলে সবসময়ে $kf(x)$-এর গ্রাফ পাওয়া যায়।

এখানে $k = 2$.
অবশেষে গ্রাফটাকে $\frac{1}{2}$ ঘর উপরে তুলে দিলেই $-2\sin(2x+1) + \frac{1}{2}$-এর গ্রাফ পাবে (Fig 22). মনে রেখো--

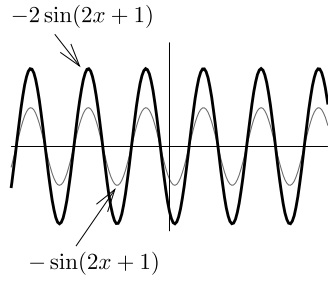
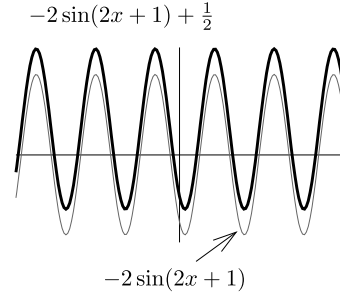



Fig 21 **Fig 22**

Rule 5 যেকোনো $f(x)$-এর গ্রাফকে উপরের দিকে a ঘর তুলে দিলে সবসময়ে $f(x)+a$-র গ্রাফ পাওয়া যায়।

■

Exercise 22: এই function-গুলোর গ্রাফ আঁকো--

$$-e^x+2, \quad \frac{2}{x-1}+1, \quad \frac{x+1}{x-1}.$$

■

সূত্রগুলো খেয়াল রাখা মোটেই কঠিন কিছু নয়। Rule 1 হল বাঁদিক-ডানদিকে সরানো নিয়ে, rule 5 হল উপর-নীচে ওঠানো-নামানো নিয়ে। Rule 2 হল রোগা-মোটা করা নিয়ে, আর rule 4 হল লম্বা-বেঁটে করা নিয়ে। আর আছে reflection-এর তিনটে সূত্র। একটা তো এক্ষুণি দেখলাম, rule 3, সেটা x-axis-এ reflect করা বিষয়ে। একইরকম আরেকটা সূত্র আছে y-axis নিয়ে--

Rule 6 যেকোনো $f(x)$-এর গ্রাফকে y-axis-এ reflect করালে সবসময়ে $f(-x)$-এর গ্রাফ পাওয়া যায়।

Example 11: e^{-x}-এর গ্রাফ আঁকো।

SOLUTION: আমরা জানি e^x-এর গ্রাফ হল Fig 23-এর মত। এটাকে y-axis-এ reflect করালেই পাব e^{-x}-এর গ্রাফ (Fig 24). ■

Reflection বিষয়ক শেষ সূত্রটা সামান্য জটিল--

Rule 7 যদি $f(x)$ একটা bijection হয়, তবে $f(x)$-এর গ্রাফকে যদি $y=x$ লাইনে reflect করাই, তবে সবসময়ে $f^{-1}(x)$-এর গ্রাফ পাওয়া যায়।

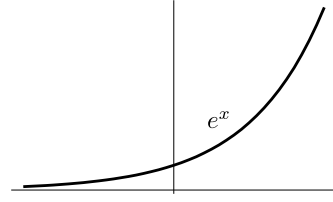
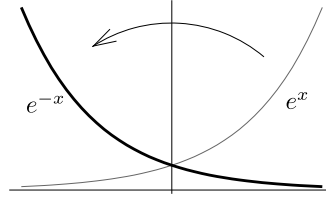
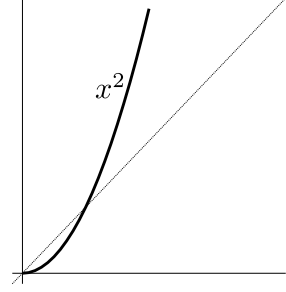



Fig 23 **Fig 24** **Fig 25**

সাবধান, $f^{-1}(x)$ মানে কিন্তু $1/f(x)$ নয়! যদি $f(x) = x^3$ হয় তবে $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, আর $1/f(x) = x^{-3}$.

Example 12: যদি $f(x) = x^2$ হয় ($f : [0, \infty) \to [0, \infty)$), তবে $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. (Fig 25-এ x^2-এর গ্রাফ এবং $y = x$ লাইনটা দেখিয়েছি। Reflection করলে পাচ্ছি Fig 26. এটাই হল $\sqrt{x}$-এর গ্রাফ। ■

Exercise 23: যদি $f(x) = e^x$ হয় ($f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$), তবে $f^{-1}(x) = \log x$. এখানে $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. এই তথ্য ব্যবহার করে $\log x$-এর গ্রাফ আঁকো। ■

1.2.2 গ্রাফ থেকে 1-1, onto বোঝা

Example 13: এমন কোনো function কি সম্ভব যার গ্রাফ Fig 27-এর মত?

SOLUTION: না, কারণ এখানে $x = a$-তে একটা vertical লাইন টানলে সেটা গ্রাফটাকে একাধিক জায়গায় ছেদ করে। যদি এটা কোনো function $f(x)$-এর গ্রাফ হত তবে $f(a)$-র তো দুটো value হয়ে যাচ্ছে b আর c. কিন্তু domain এর প্রতিটি point-এ একটা function-এর তো ঠিক একটাই value হতে পারে! ■

Exercise 24: Fig 28 কি কোনো function এর গ্রাফ হতে পারে? ■

Example 14: Fig 29-এ যে function-এর গ্রাফটা রয়েছে সেটা কি one-to-one?

SOLUTION: না, কারণ $y = a$ দিয়ে টানা horizontal লাইনটা গ্রাফটাকে একাধিক জায়গায় ছেদ করেছে। ফলে $f(x) = a$ হচ্ছে x-এর একাধিক value-র জন্য ($x = b, c, d$). ■

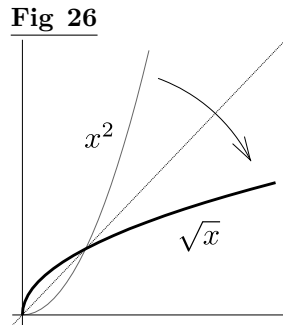
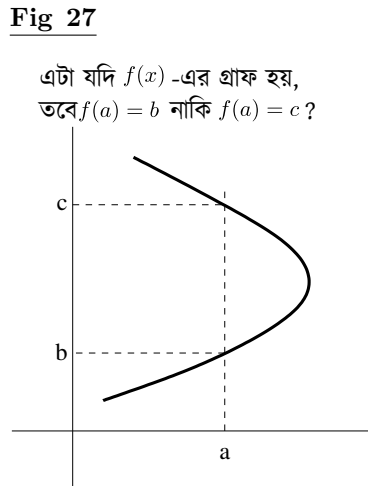



Fig 26 **Fig 27** **Fig 28**

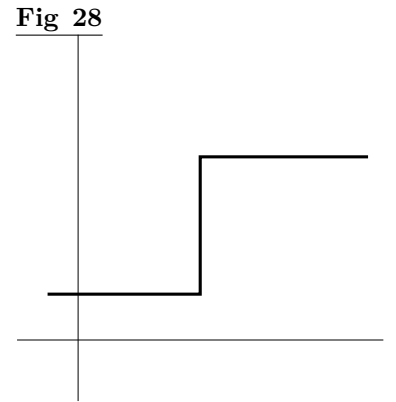
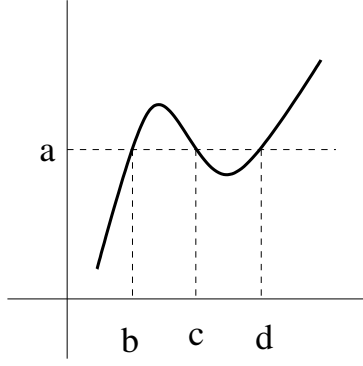
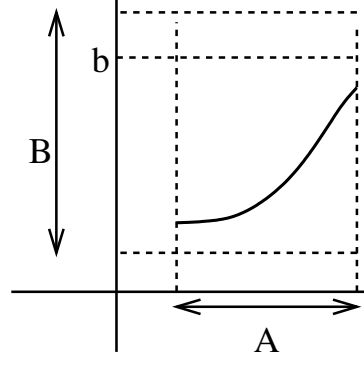



Fig 29 **Fig 30**

Exercise 25: Fig 16-এ যে সব function ছিল, তাদের মধ্যে কারা one-to-one? ■

Example 15: Fig 30-এ একটা function $f : A \to B$-র গ্রাফ আছে। এটা কি onto?

SOLUTION: না, কারণ ছবিতে আমরা এমন একটা $b \in B$ নিতে পারি যে $y = b$ দিয়ে টানা horizontal লাইনটা গ্রাফটাকে আদৌ কোথাও ছেদ করে না। তার মানে $f(x)$ এই b value-টা কখনোই নেয় না। ■

Exercise 26: Fig 16-তে $f(x) = e^x$-এর গ্রাফ আছে। যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ নিই তবে, কি এটা একটা onto function? যদি $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ নিই? আর যদি $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ নিই? ■

Example 16: যদি $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ হয় যেখানে $f(x) = x^2$, তার গ্রাফ কিন্তু খালি x-axis-এর $[-1, 2]$ অংশটুকুর উপরই থাকবে (Fig 31). ■

একই function-এর গ্রাফের অনেক সময়ে একাধিক টুকরো থাকে।

Example 17: যদি $f : [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{4\}$ হয় যেখানে $f(x) = x$ তবে গ্রাফটা কি রকম হবে?

SOLUTION: Fig 32-এর মত। ■

Exercise 27: গ্রাফ আঁকো-- $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = x^2$. ■

Fig 31

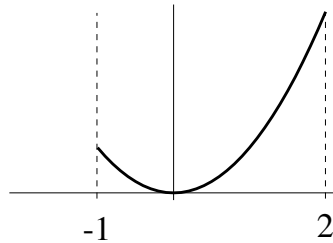
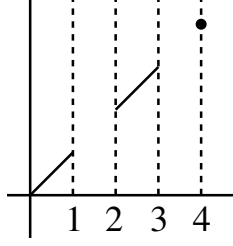
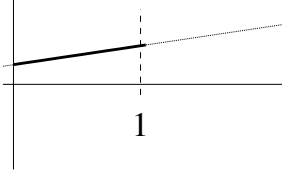
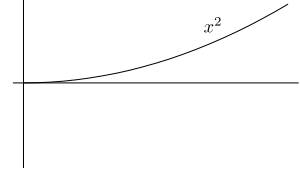



Fig 32 Fig 33 Fig 34

যে সব গ্রাফের ফর্মুলার একাধিক অংশ তাদের গ্রাফের বেলায় অংশগুলোকে একে একে আঁকতে হয়।

Example 18:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ 2-x^2 & \text{if } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

এর গ্রাফ আঁকো।

SOLUTION:

প্রথমে $0 \leq x < 1$ অংশটা দেখি। এখানে ফর্মুলাটা হল $1+x$ যেটা একটা সরলরেখা। সুতরাং x-এর যেকোনো দুটো value নিই, ধরো 0 আর 2. এ দুটো জায়গায় $1+x$-এর value হবে যথাক্রমে 1 আর 3. তার মানে $(0,1)$ এবং $(2,3)$ বিন্দু দুটো দিয়ে যে সরলরেখাটা যায় সেটাই হল $1+x$-এর গ্রাফ (Fig 33). আমাদের অবশ্য এই পুরো সরলরেখাটা লাগবে না, খালি $0 \leq x < 1$ অংশটুকু লাগবে।

এবার $1 \leq x \leq 2$ অংশটা নিয়ে পড়ি। $2-x^2$ একটা সরলরেখা নয়, পরিচিত কিছুও নয়। সুতরাং ধাপে ধাপে এগোব। এর মধ্যে x^2 অংশটুকু চেনা ঠেকছে, সেটার গ্রাফ এঁকে শুরু করি (Fig 34). সুতরাং $-x^2$-এর গ্রাফ পাব এটাকে x-axis বরাবর প্রতিফলিত করলে। Fig 35 দ্যাখো। আমাদের দরকার $2-x^2$, তার মানে আরও 2 যোগ করতে হবে। ফলে $-x^2$-এর গ্রাফটা দুইঘর উপরে উঠে যাবে (Fig 36). পুরো গ্রাফটা আমাদের দরকার নেই, খালি $1 \leq x \leq 2$ অংশটুকু রাখব (Fig 37)।

এবার দুটো অংশ পাশাপাশি আঁকলে পাব Fig 38. কিন্তু এখনও গল্পটা পুরো শেষ হয় নি। যদি তোমাকে $f(1)$ বার করতে বলি, তবে তুমি ফর্মুলা দুটোর দিকে তাকালেই বুঝবে যে দ্বিতীয় ফর্মুলাটা লাগাতে হবে, কারণ "$x = 1$" কেসটা "$1 \leq x \leq 2$"-এর মধ্যে পড়ে। কিন্তু সেই কথাটা গ্রাফ থেকে মোটেই বোঝা যাচ্ছে না। সেইটা বোঝানোর জন্য আমরা গ্রাফটাকে আঁকব Fig 39-এর মত করে। ওই ডটটা বলে দিচ্ছে যে $f(1)$-এর value কত হবে। যে মাথায় ডট্ নেই সেটাকে আমরা একটু মুড়িয়ে দিয়েছি (একটা ছোট্টো ব্যারিকেড বসিয়ে), যাতে কোনো ভুল বোঝাবুঝির সম্ভাবনামাত্র না থাকে। ■

Example 19: যদি

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ 3 & \text{if } x = 1 \\ 2 & \text{if } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

হয়, তবে তার গ্রাফ হবে এরকম--

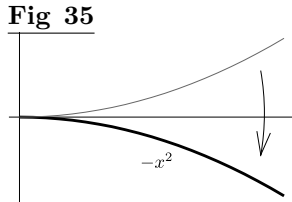



Fig 35

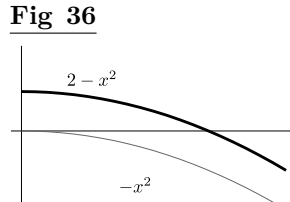



Fig 36

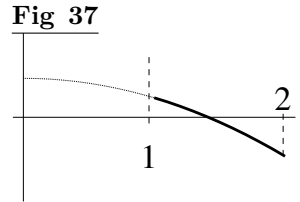



Fig 37

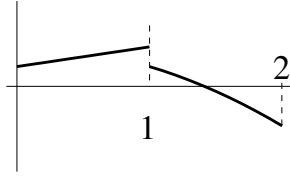



Fig 38

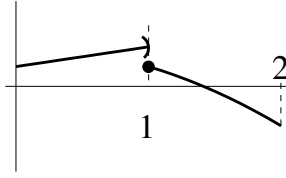
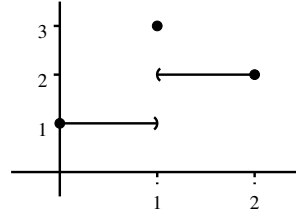



Fig 39

■

1.2.3 Absolute value function, $|x|$

একাধিক টুকরো-ওয়ালা function নিয়ে প্রথম মাথা ঘামানো কি করে শুরু হল তার একটা মজার ইতিহাস আছে। আগে function বলতে খালি সহজ সহজ জিনিস বোঝাতো যেগুলোকে কেবল একখানা ফর্মুলা দিয়েই লিখে ফেলা যায়, যেমন x^2+3x বা $\sin x$ এইসব। D'Alembert নামে একজন পণ্ডিত ছিলেন, তাঁর আগ্রহ ছিল বিভিন্ন তারের বাদ্যযন্ত্র কি করে শব্দসৃষ্টি করে সেই বিষয়ে গবেষণা নিয়ে। ধরো গীটারের একটা তার, সেটা যখন কাঁপছে তখন দেখতে হবে Fig 40-এর মত কিছু একটা। এইটাকে D'Alembert দিব্যি sine, cosine ইত্যাদি দিয়ে লিখতে পারছিলেন। কিন্তু যখন তারটা প্রথম টানা হয়েছিল তখন সেটা দেখতে ছিল Fig 41-এর মত, যেটা দুটো সরলরেখা জুড়ে তৈরী। এইখানেই D'Alembert ভারী ধন্দে পড়ে গেলেন, পুরোটাকে একটা function বলে কি ভাবা উচিত? সে আমলে Euler[2] বলে আরেকজন গণিতজ্ঞ ছিলেন, তিনি বলেন যে দুটো টুকরোকে একসঙ্গে মিলিয়ে একটা function ভাবতে আপত্তি থাকা উচিত নয়। অবশ্য সে কথাটা D'Alembert-এর মনে ধরে নি। একটা function-এর একাধিক টুকরো থাকতে পারে কিনা এই নিয়ে যখন বেজায় তর্ক চলছে তখন Cauchy (কোশি) নামে এক ফরাসী গণিতজ্ঞ এই function-টা নিলেন--

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{if } x\geq 0 \\ -x & \text{otherwise}\end{cases}$$

[2]উচ্চারণ অয়লার। ইউলার নয়!

Fig 40

Fig 41

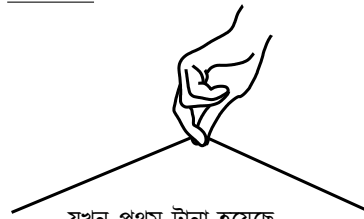
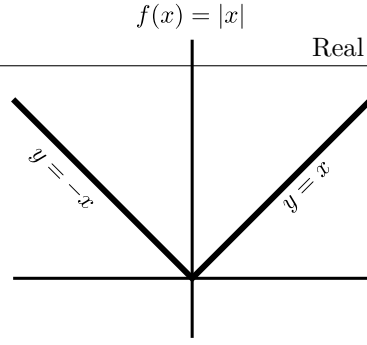
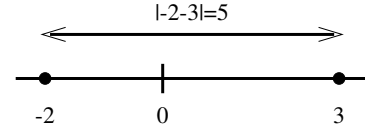



Fig 42 **Fig 43**

Fig 42-এর এর গ্রাফটার দিকে একঝলক তাকালেই বুঝবে যে এটাও অনেকটা গীটারের তারে টান দেওয়ার মতই দেখতে, এবং $f(x)$-কে এখানেও দুটো টুকরোতে ভেঙে লেখা হয়েছে। কিন্তু Cauchy বললেন যে এটাকে একখানা ফর্মুলা দিয়েও লেখা যায় এইভাবে--$f(x) = \sqrt{x^2}$. সুতরাং এই এক-টুকরো-না-একাধিক-টুকরো এই তর্কের কোনো মানেই হয় না। একই function-কে বিভিন্নভাবে লিখলে বিভিন্ন সংখ্যক টুকরো হতেই পারে। অতএব গুরুত্বপূর্ণ কথা খালি হল প্রত্যেকটা x-এর জন্য $f(x)$-এর ঠিক একটাই value পাচ্ছি কিনা। এইভাবে তারের বাদ্যযন্ত্র নিয়ে চিন্তা করতে গিয়ে function-এর আধুনিক সংজ্ঞার জন্ম হয়। আজ আর কেউ এক-টুকরো-দুই-টুকরো নিয়ে মাথা ঘামায় না, কিন্তু Cauchy যে $f(x)$-টা দিয়েছিলেন সেটা আজও বহুল-ব্যবহৃত। এই বইয়ের পাতায় পাতায় একে দেখতে পাবে। এর নাম হল absolute value function,এবং একে লেখে $|x|$. যেমন $|2| = 2$ আবার $|-2| = 2$. অর্থাৎ, absolute value নেওয়া মানে চিহ্নটাকে স্রেফ উড়িয়ে দেওয়া। এই function-টার সবচেয়ে বড় প্রয়োগ হল দূরত্ব মাপার জন্য। ধরো real line-এর উপর দুটো point নিলাম a আর b, উদাহরণস্বরূপ ভাবো $a = -2$ আর $b = 3$. তবে ওদের মধ্যে দূরত্ব হল

$$|a - b| = |-2 - 3| = |-5| = 5.$$

Fig 43 দ্যাখো। দূরত্বের ধারণার সঙ্গে ওতপ্রোতভাবে জড়িত triangle inequality বলে একটা জিনিস। সে বিষয়ে একটু আলোচনা করি।

1.2.4 Triangle inequality

মনে করো real line-টা একটা লম্বা রাস্তা, তার উপর তিন জায়গায় তিন জন দাঁড়িয়ে আছে, a, b আর c, কে আগে কে পরে বলছি না। খালি বলে দিচ্ছি যে a আর b-এর মধ্যে দূরত্ব হল 5 কিলোমিটার, আর b এবং c-এর দূরত্ব হল 3 কিলোমিটার, তবে a এবং c-এর মধ্যে দূরত্ব কত হবে বলতে পারো? একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে এক কথায় কিছু বলা যায় না, উত্তরটা নির্ভর করছে কে কার পরে আছে তার উপরে। যদি a আর c থাকে b-এর দুই বিপরীতদিকে তবে উত্তরটা হবে $5 + 3 = 8$ কিলোমিটার (Fig 44)। যদি একই দিকে থাকে তবে উত্তরটা হবে $5 - 3 = 2$ কিলোমিটার (Fig 45)। সুতরাং যেটুকু বলা যায় সেটা হল

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c| \tag{1}$$

এবং

$$|a - c| \geq \big|\ |a - b| - |b - c|\ \big|. \tag{2}$$

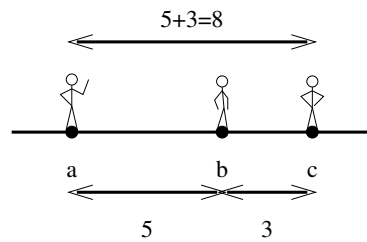



Fig 44 **Fig 45**

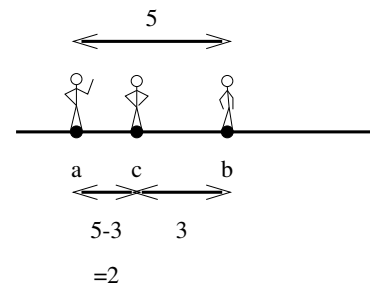
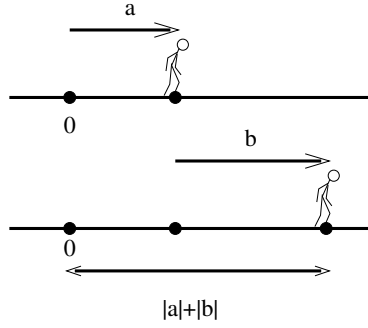
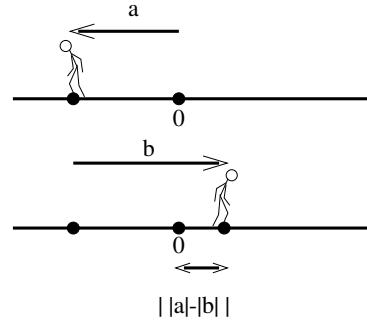



Fig 46 **Fig 47**

যদিও নিতান্ত সহজ বুদ্ধিতেই এগুলো পাওয়া গেল, কিন্তু দেখতে বেশ জব্বর। এদেরকে বলে triangle inequality. এরকম নামকরণের কারণ হল--যদি a, b, c-কে একটা লাইন বরাবর না ভেবে কাগজের পাতায় একটা triangle-এর তিনটে প্রান্ত বলে ভাবতে তবে (**1**)-এর মানে হল triangle-এর যে কোনো দুটো side-এর (মানে বাহুর) দৈর্ঘ্যের যোগফল তৃতীয় side-এর দৈর্ঘ্যের চেয়ে ছোটো হতে পারে না।
শুধু এই দুটোই নয়, আরও কয়েকটা একই রকম inequality আছে, তাদেরকেও লোকে triangle inequality বলে থাকে। যেমন ধরো একটা লোক 0 থেকে শুরু করে real line ধরে a পরিমাণ গেল ($a \geq 0$ হলে ডানদিকে, $a < 0$ হলে বাঁদিকে)। সেখান থেকে আবার আরও b পরিমাণ গেল। সুতরাং ওর বর্তমান অবস্থান হচ্ছে $a + b$. প্রশ্ন হল ও এখন 0 থেকে কত দূরে আছে? এখানেও উত্তরটা নির্ভর করছে লোকটা কি কি দিকে হেঁটেছে, তার উপর। যদি দুবারই একই দিকে হেঁটে থাকে, তবে দূরত্বদুটো যোগ হয়ে যাবে, মানে $|a| + |b|$. আর যদি বিপরীত দিকে হেঁটে থাকে, তবে বিয়োগ হবে, মানে বড় দূরত্বটা থেকে ছোটো দূরত্বটা বিয়োগ, অর্থাৎ $|\ |a| - |b|\ |$. Fig 46 এবং Fig 47 দ্যাখো। সুতরাং বলা চলে যে

$$|a + b| \leq |a| + |b| \tag{3}$$

এবং

$$|a + b| \geq |\ |a| - |b|\ |. \tag{4}$$

এদেরকেও লোকে triangle inequality বলে। এখানে লোকটা দুইধাপে হেঁটেছে, চাইলে তিন, চার, বা তারও বেশী ধাপ হাঁটানো যেত, ধরো n ধাপ, প্রথম ধাপে a_1 পরিমাণ, দ্বিতীয় ধাপে a_2 পরিমাণ, এইরকম। তাহলে (**3**)-টা দেখতে হত--

$$|a_1 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + \cdots + |a_n|. \tag{5}$$

এটাও একটা triangle inequality. এক্ষেত্রে অবশ্য (**4**)-এর মত কিছু পাওয়া কঠিন।
আরেকধরণের inequality-র কথা বলে শেষ করি, সেটাকেও লোকে অনেক সময়ে triangle inequality বলে থাকে। Real line-এর উপর দুটো সংখ্যা নিলাম, -2 আর 3. Fig 48 দ্যাখো। ওদের absolute value-গুলো কোথায় থাকবে? যেহেতু $3 > 0$ তাই ও absolute value নেওয়ার ফলে ওর অবস্থান বদলাবে না, কিন্তু -2 আছে 0-র বাঁদিকে। তাই absolute value নেওয়ার ফলে real line-এর negative অংশটা যেন 0-তে ভাঁজ হয়ে গিয়ে positive অংশের ঘাড়ে গিয়ে পড়বে। ফলে -2-র absolute value হবে $+2$. এই ভাঁজ হওয়ার গল্পটা মাথায় রেখে এই প্রশ্নটার উত্তর দাও--

> দুটো সংখ্যা আছে $a, b \in \mathbb{R}$. তবে a আর b-এর মধ্যে দূরত্ব বেশী, নাকি $|a|$ আর $|b|$-এর মধ্যে?

মানে, ভাঁজ করার ফলে কি দূরত্ব বেড়ে যায় নাকি কমে যায়? অবশ্যই বেড়ে যেতে পারে না। কারণ যদি a, b দুজনেই 0-র একই দিকে থাকত (Fig 49) তবে ভাঁজের পরেও ওরা একই দূরত্বে থাকবে। যদি দুজন 0-র দুদিকে থাকত (Fig 50), তবে ভাঁজের ফলে দুজনেই এক দিকে চলে আসবে, ফলে আরো কাছাকাছি হয়ে যাবে। সুতরাং আমরা আরও একটা inequality পেয়ে গেলাম--

$$|\ |a| - |b|\ | \leq |a - b|. \tag{6}$$

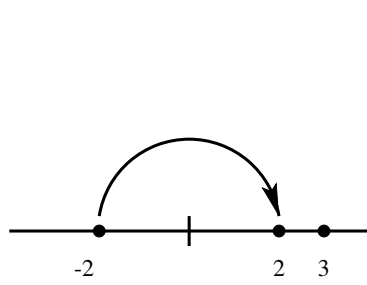
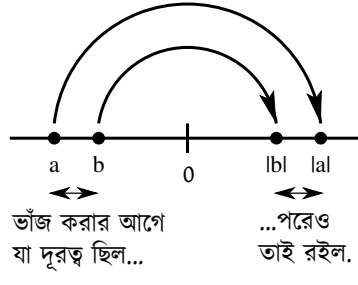
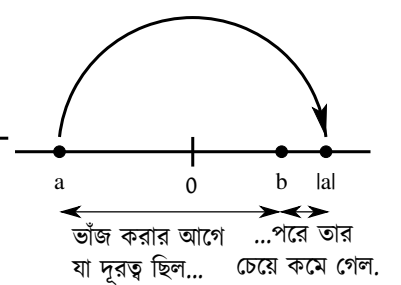



Fig 48 **Fig 49** **Fig 50**

Triangle inequality-র এতরকম রূপ দেখে অনেক ছাত্রই দিশাহারা হয়ে পড়ে--কখন কোনটা লাগবে বুঝব কি করে? উত্তর হল--সব সময়ে real line-এর ছবিটা এবং প্রত্যেকটা রূপের পিছনে যে গল্পটুকু দিলাম সেটা মাথায় রাখবে, তবে দেখবে সহজ বুদ্ধিতেই সিদ্ধান্ত হয়ে যাবে কোন দূরত্বটা কার চেয়ে বড়। সিদ্ধান্তটা একবার হয়ে গেলে পরে অনায়াসে ঠিক করতে পারবে কোন রূপটা কাজে লাগছে। এই বইতে সবচেয়ে বেশী ব্যবহার হবে (**1**) রূপটা।

1.2.5 Image and preimage

মনে আছে নিশ্চয়ই কিভাবে আমরা কোনো set A-র প্রতিটি element-এর negative করে $-A$ পেয়েছিলাম? একইভাবে কোনো একটা function $f(x)$ দেওয়া থাকলে আমরা $f(A)$ বার করতে পারি। তার জন্য A-র প্রত্যেকটা element x নেব, এবং $f(x)$ বার করব। এইভাবে যেসব সংখ্যা পাব তাদের set-ই হল $f(A)$. **Example 20:** যদি $f(x) = x^2$

আর $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ হয় তবে $f(x)$ কি হবে?
SOLUTION:

$$f(A) = \left\{(-1)^2, 0^2, 1^2, 2^2\right\} = \{1, 0, 1, 4\} = \{0, 1, 4\}.$$

লক্ষ কর যে $(-1)^2 = 1^2 = 1$. কিন্তু যেহেতু একই set-এ কোনো element একাধিকবার লেখা হয় না, তাই আমরা 1-কে খালি একবারই লিখেছি। ■

এখানে একটা কথা বলে রাখি। $f(x) = x^2$ হলেও $f(A)$-কে কিন্তু A^2 লেখে না!

Example 21: এবার ধর দিলাম $B = \{-1, 1, 4\}$. তবে $\log(B)$ বার করতে পারবে?

SOLUTION: $\log(B)$ মানে হওয়া উচিত $\{\log(-1), \log 1, \log 4\}$. কিন্তু negative সংখ্যার log হল undefined. যেহেতু B-তে অন্ততঃ একটা negative সংখ্যা আছে, তাই $\log(B)$ হবে undefined. ■

Exercise 28: প্রতি ক্ষেত্রে $g(B)$ কি হবে?
(**1**) $g(x) = -\sqrt{x}, \quad B = \{1, 4, 9\}$ (**2**) $g(x) = \frac{1}{x}, \quad B = \{0, 2, 3\}$
■

যদি A কোনো set হয়, আর $f(x)$ হয় একটা কোনো function (যাতে কোনো $x \in A$-র জন্যই $f(x)$-টা undefined নয়), তবে $f(A)$-র একটা গালভরা নাম আছে--**image of A under f**. এইরকম অদ্ভুত নাম হওয়ার পিছনে কারণ হল এই-- তোমরা জানো যে ক্যামেরায় কিভাবে ছবি ফুটে ওঠে (Fig 51). যে জিনিসটার ছবি তোলা হচ্ছে তার বিভিন্ন বিন্দু থেকে আলোকরশ্মি এসে ক্যামেরার লেন্স দিয়ে ফিল্মের উপর পড়ে। ফিল্মের যে সব বিন্দুতে এই রশ্মিগুলো পড়ে সেই সব বিন্দু নিয়েই ছবিটা তৈরী হয়। এদিকে একটা function $f : X \to Y$-কে Fig 52-এর মত করে ভাবা যায়। এখানে তীরচিহ্নগুলোকে যদি আলোকরশ্মি ভাবো তবেই বুঝবে কেন $f(A)$-কে আমরা A-র image বলি (Fig 53)।

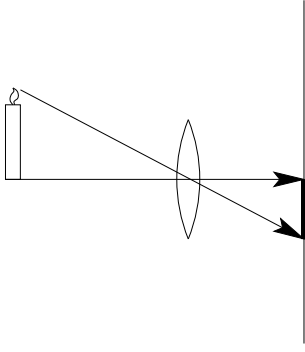
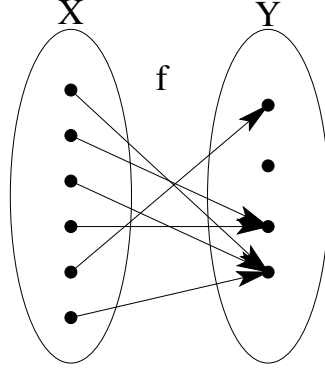
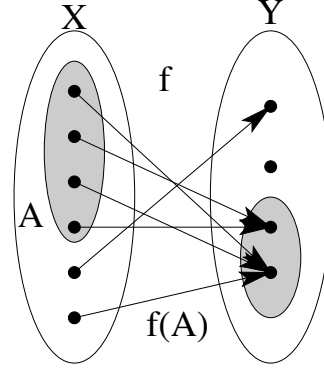



Fig 51 **Fig 52** **Fig 53**

এই image-এর ব্যাপারটা অংকে খুব দরকারী, কিন্তু তার চেয়েও বেশী দরকারী হল এর উল্টো ব্যাপারটা যাকে বলে **preimage**. এবার সেটা কি দেখি।
ধরো একটা function দিলাম $f(x) = 2x$ আর একটা set দিলাম $A = \{2, 4, 6\}$. দিয়ে বললাম $f^{-1}(A)$ বার কর। এর মানে হল-- সেই সব x-দের বার কর যাতে $f(x) \in A$ হয়। যেহেতু $f(x) = 2x$, তাই আমাদের দেখতে হবে কোন কোন সংখ্যাকে ডবল করলে $2, 4$ বা 6 হয়। উত্তর হল $1, 2$ আর 3. সুতরাং $f^{-1}(A) = \{1, 2, 3\}$.

Example 22: যদি $g(x) = x^2$ হয় আর $B = \{0, 1, 4\}$ তবে $g^{-1}(B)$ কি হবে?

SOLUTION: দেখতে হবে কোন কোন সংখ্যার square হয় $0, 1$ বা 4. উত্তর হল $0, \pm 1$ আর ± 2. লক্ষ কর 1 এবং 4 থেকে দুটো করে square root পেয়েছি। সব মিলিয়ে দাঁড়ালো-- $g^{-1}(B) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. ■

Example 23: যদি $f(x) = x^2$ হয় তবে $f^{-1}(A)$ বার কর, যেখানে $A = (0, 1)$.

SOLUTION: তার মানে দেখতে হবে এমন কি কি x সম্ভব যাতে $0 < x^2 < 1$ হয়। উত্তর হল হয় $-1 < x < 0$ নয় $0 < x < 1$. তাই

$$f^{-1}(A) = (-1, 0) \cup (0, 1).$$

■

এবার preimage-এর ব্যাপারটা একটু ছবি দিয়ে বোঝা যাক। Fig 54-এ একটা function $f : X \to Y$ দেখানো হয়েছে। Y-এর একটা subset B-ও দেখানো হয়েছে। ধর, আমরা $f^{-1}(B)$ বার করতে চাই। তার জন্য আমরা দেখব X-এর কোন কোন element থেকে তীর এসে B-তে পড়েছে। এই সব element-দের set-টাই হল $f^{-1}(B)$. Fig 55 দ্যাখো।
হঠাৎ দেখলে মনে হতে পারে যে image ব্যাপারটা সহজ, আর preimage ব্যাপারটা বেশী গোলমেলে। আসলে কিন্তু preimage নিয়ে কাজ করাই বেশী সহজ। তার কারণটা বোঝার জন্য ধর $f : X \to Y$ যে কোনো function, আর $A, B \subseteq X$. তাহলে একটু চিন্তা করলেই দেখবে যে

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

এইবার নীচের অংক দুটো কর।

Exercise 29: Fig 56-এ যে উদাহরণটা আছে সেটা থেকে $f(A), f(B)$ এবং $f(A \cap B)$ বার কর। লক্ষ কর যে $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$. ■

Exercise 30: আবার Fig 56 দ্যাখো। $f(A^c)$ আর $f(A)^c$ বার করে দ্যাখো তো সমান হয় কি না। ■

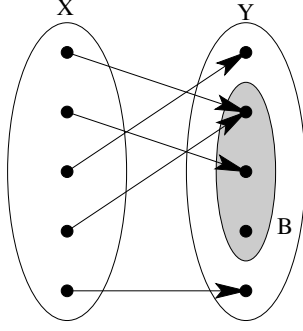
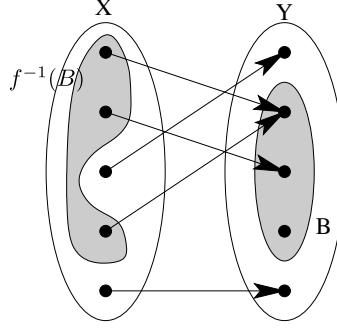
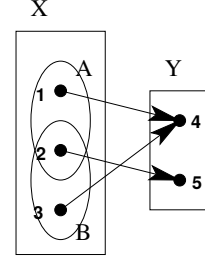



Fig 54 **Fig 55** **Fig 56**

কিন্তু preimage-এর বেলায় এরকম কোনো অসুবিধা নেই।

> **Properties of preimage**
>
> Let $f: X \to Y$ be any function. Let $A, B \subseteq Y$ be any two sets. Then
>
> - $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
> - $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
> - $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$
>
> Also, if $A \subseteq B$ then $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

Exercise 31: যদি $f: X \to Y$ আর $A \subseteq B \subseteq X$ হয় তবে কি সব সময়েই $f(A) \subseteq f(B)$ হবে? ■

গ্রাফ থেকে image আর preimage বার করা খুব সহজ।

Example 24: Fig 57-এ একটা $f(x)$-এর গ্রাফ আর একটা set A দেখানো আছে। গ্রাফে $f(A)$-টা কোথায় দ্যাখাও।

SOLUTION: প্রথমে লক্ষ কর গ্রাফের কোন অংশটা A-র উপরে আছে। সেই সব অংশের জন্য y-axis-এ $f(x)$-এর যে সব value পাব তাদের set-টাই হল $f(A)$. (Fig 58). ■

Preimage বার করাটাও একইরকম, খালি এবার y-axis থেকে x-axis-এ যাব।

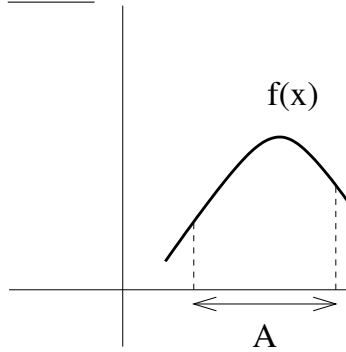



Fig 57 **Fig 58**

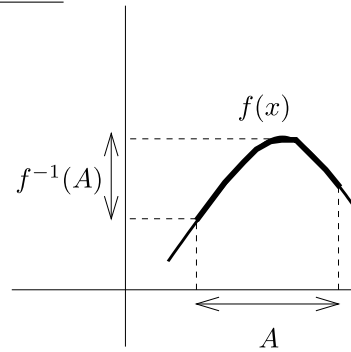
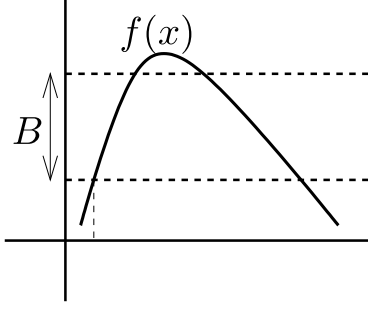
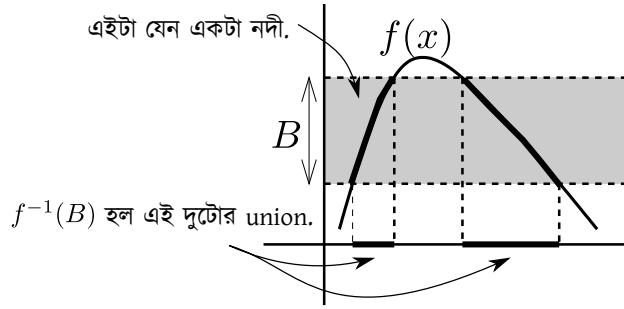



Fig 59 **Fig 60**

Example 25: Fig 59-এ একটা $f(x)$-এর গ্রাফ আর একটা set B রয়েছে। গ্রাফে $f^{-1}(B)$-টা কোথায় দ্যাখাও।

SOLUTION: প্রথমে মনে কর B দিয়ে একটা নদী বইছে। তাহলে গ্রাফের কোন কোন অংশ নদীর মধ্যে পড়ে দ্যাখো। সেই সব অংশে x-এর value-গুলোর set-টাই হল $f^{-1}(B)$. Fig 60 দ্যাখো। ■

1.2.6 x^{-1}, $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(A)$

-1 যখন power-এর মত মাথায় চড়ে বসে তখন ভারী মুস্কিল, বিভিন্ন ক্ষেত্রে ওর মানে বিভিন্ন। যদি কোনো সংখ্যার বা variable-এর মাথায় চড়ে, যেমন 3^{-1} বা x^{-1}, তবে বোঝায় সেই সংখ্যা বা variable-এর reciprocal, যেমন $3^{-1} = \frac{1}{3}$. কিন্তু যদি $f(x)$ একটা function হয়, তবে f^{-1} বলতে আমরা অন্য জিনিস বুঝি। যদি f^{-1}-এর পেটে কোনো সংখ্যা বা variable জাতীয় কিছু তাকে, যেমন $f^{-1}(3)$ বা $f^{-1}(y)$, তবে বুঝতে হবে যে $f(x)$ হল একটা bijection, আর f^{-1} মানে f-এর inverse. কিন্তু যদি f^{-1}-এর পেটে কোনো set থাকে, তাহলে f-এর bijection হবার কোনো দরকার নেই, সেক্ষেত্রে $f^{-1}(A)$ মানে A-র preimage.

Example 26: যদি $f(x) = x^3$ (যেখানে $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) হয় তবে $f^{-1}(8), (f(8))^{-1}$ আর $f^{-1}(\{8\})$ মানে কি? আর যদি $f(x) = x^2$ হত ($f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$) তবে?

SOLUTION: যদি $f(x) = x^3$ হয় তবে

$$f^{-1}(8) = \sqrt[3]{8} = 2, \quad (f(8))^{-1} = \frac{1}{8^3}, \quad f^{-1}(\{8\}) = \{2\}.$$

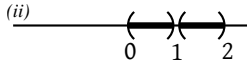
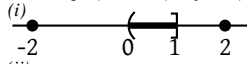
যদি $f(x) = x^2$ হয় তবে

$$(f(8))^{-1} = \frac{1}{8^2}, \quad f^{-1}(\{8\}) = \{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\}.$$

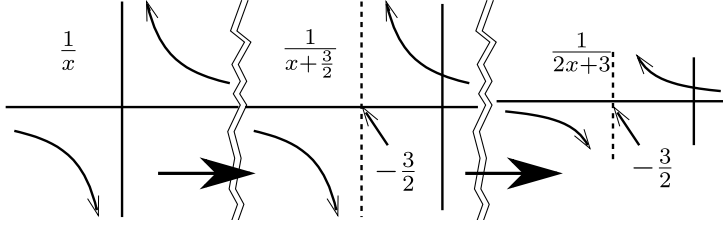
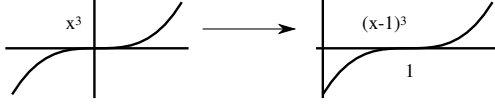
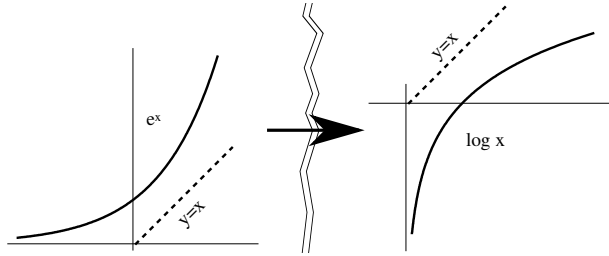
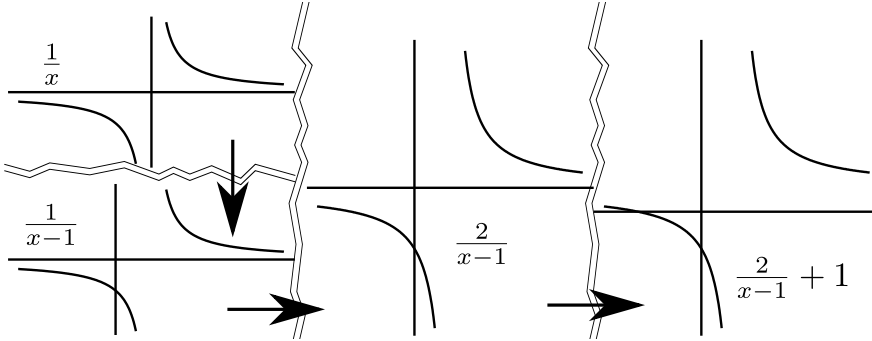
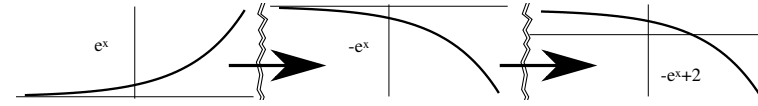
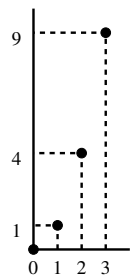
এখানে $f^{-1}(8)$ হল undefined, কারণ $f(x) = x^2$ ($f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$) মোটেই একটা bijection নয়। ■

Answers

1. $\{2n - 1 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, অন্য set-টায় 1 নেই। **2.** $\mathbb{Z}$. **3.** **(1)** ঠিক **(2)** ভুল **(3)** ঠিক
4. $0, 1 \in \{0, 1\}$, $0, \frac{1}{2}, 1 \in [0, 1]$, $\frac{1}{2} \in (0, 1)$, $\frac{1}{2}, 1 \in (0, 1]$, $0, \frac{1}{2} \in [0, 1)$.
5. $[-\infty, 2], (1, 2, 3), \{1, 2)$. **6.** $[0, 1] \cup (1, 2]$, $[0, 1) \cup [1, 2]$, $[0, 1] \cup [1, 2]$.

(i) -2 0 1 2
(ii) 0 1 2

7. **8.** **(1)** ঠিক, **(2)** ভুল, **(3)** ঠিক, **(4)** ভুল। **9.** ঠিক। **10.** Finite.

11. না। **12.** **(1)** ভুল **(2)** ঠিক **(3)** ঠিক **(4)** ভুল।
13. $(1, 100)$, $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$ হল bounded, বাকীরা unbounded.
14. **(1)** ভুল **(2)** ঠিক **(3)** ঠিক **(4)** ভুল। **15.** প্রথম আর চতুর্থটা। **16.** $2, -3, 3$. **17.** হ্যাঁ, vacuously.
18. না, হ্যাঁ। **19.** $B = \{-1, -2\}$, $A + B = \{-1, 0, 1\}$. **20.** আবেদন করতে পারে $M \cup P$. পারবে না যাদের math-ও নেই, physics-ও নেই, মানে $M^c \cap P^c$. সুতরাং $(M \cup P)^c = M^c \cap P^c$. **21.**

22.

$\frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$. **23.** **24.** না, ওই vertical অংশটা আছে বলে। **25.** $x^3, \frac{1}{x}, e^x$. **26.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হলে onto নয়, $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ হলে onto,

$f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ হলে নয়। **27.**

28. **(1)** $g(B) = \{-3, -2, -1\}$ **(2)** $g(B)$ undefined.
29. $f(A) = f(B) = \{4, 5\},\ f(A \cap B) = \{5\}$. **30.** $(f(A))^c = \phi,\ f(A^c) = \{4\}$, অসমান। **31.** হ্যাঁ।

Chapter III
Open and closed sets

DAY 1
Interior and boundary points

Fig 1-এ $(0,1]\cup\{1.5\}$ set-টা দেখিয়েছি। আর দেখিয়েছি পাঁচটা point $0, 0.1, 0.6, 1$ আর 1.5. এখানে $0, 1$ আর 1.5 এই তিনটে point-এর একটা বৈশিষ্ট্য আছে, যেটা $0.1, 0.6$-এর নেই। বৈশিষ্ট্যটা হল এরা একেবারে কিনারায় রয়েছে, দেওয়ালে পিঠ ঠেকিয়ে। বাকী point-গুলো set-এর খানিকটা হলেও গভীরে আছে, চাইলে ওরা দুইদিকে একটু হাত-পা খেলাতে পারে। যেসব point একেবারে কিনারায় থাকে তাদের বলে **boundary point,** যেমন এখানে $0, 1$ আর 1.5. আর যেসব point আছে set-এর কিছুটা গভীরে, তাদের বলে **interior point,** যেমন এখানে $0.1, 0.6$ ইত্যাদি $(0,1)$-এর যেকোনো point. মনে রেখো যে boundary point-রা set-এর ভিতরেও থাকতে পারে, বাইরেও থাকতে পারে, কিন্তু interior point-রা সব সময়েই set-এর ভিতরে থাকে।

Exercise 1: Fig 2 দেখে বল a, b, c, d-র মধ্যে কারা boundary point আর কারা interior point আর কে কোনোটাই নয়। ■

Exercise 2: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে একটা করে set S আর তিনটে করে point a, b, c দেওয়া আছে। প্রতি ক্ষেত্রে ছবি এঁকে বল a, b, c-র মধ্যে কারা boundary point বা interior point বা কোনোটাই নয়।

1. $S=\{1,2,3\},\ \ a=2, b=1.5, c=1.$
2. $S=(-1,2)\cup(2,3],\ \ a=2, b=-1.5, c=0.$
3. $S=(0,1)\cup[1,3),\ \ a=1, b=0, c=-1.$

■

Fig 1

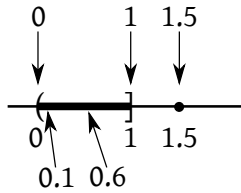



Fig 2

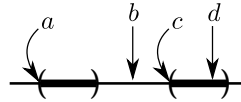
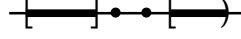



Fig 3

Exercise 3: $[1,2)\cup(2,4]\cup(4,10)$-এ মোট কয়টা boundary point আছে? ■

Exercise 4: Fig 3-এর set-টার ভিতরে এমন একটা point দেওয়া কি সম্ভব যেটা interior point-ও নয়, boundary point-ও নয়? ■

1.1 Interior point

এবার আমরা interior point-এর definition অংকের ভাষায় লেখার চেষ্টা করব। যে ব্যাপারটা চোখে দেখে বোঝা যাচ্ছে সেটাকে অংকের ভাষায় প্রকাশ করতে পারার ক্ষমতাটা অংক শেখার জন্য অত্যন্ত জরুরী। ঠিক যেমন মনের কথা ভাষায় লিখে বোঝাতে না পারলে মানুষ চিঠি বা বই লিখে ভাব আদানপ্রদান করতে পারত না, সেইরকম।
Interior point মানে এমন একটা point যেটা আছে set-এর কিছুটা গভীরে, অর্থাৎ যার দুপাশে set-এর মধ্যে খানিকটা হাত-পা খেলাবার জায়গা আছে। ধর $S\subseteq\mathbb{R}$ একটা set আর $a\in S$ তার একটা point. আমরা a-কে S-এর interior point বলব যদি

$\exists$ দুই-পাশে হাত-পা খেলাবার খানিকটা জায়গা a-কে ঘিরে S-এর মধ্যে।

এখনও কথাটা পুরো অংকের ভাষায় লেখা হয় নি। দুইপাশে হাত-পা খেলাবার জায়গা বলতে ঠিক কতটা জায়গা চাই? বেশী কম কিছুতেই আপত্তি নেই, একমাত্র আপত্তি কোনো একদিকে জায়গার পরিমাণটা শূন্য হয়ে গেলে। তার মানে জায়গার পরিমাণটাকে যদি ϵ বলি, তবে $\epsilon>0$ হলেই আমরা খুশী। এবং, হ্যাঁ, এই পরিমাণ জায়গা কিন্তু a-র দুই পাশেই চাই, অর্থাৎ $(a-\epsilon,a+\epsilon)$ পুরোটাই S-এর মধ্যে থাকবে। মনে আছে নিশ্চয়ই যে $(a-\epsilon,a+\epsilon)$-এর ডাকনাম হল $N(a,\epsilon)$? এইবার আমরা নীচের প্রশ্নটার উত্তর দিতে তৈরী।

Example 1: Define interior point of a set $S(\subset\mathbb{R})$[1] **(2003)**

SOLUTION:

DEFINITION: **Interior point**

Let $S\subseteq\mathbb{R}$ and $a\in S$. Then a is called an interior point of S if

$$\exists\epsilon>0\quad N(a,\epsilon)\subseteq S.$$

যেকোনো definition-এর সঙ্গেই কিছু উদাহরণ দিয়ে দেওয়া ভালো (Fig 4)--

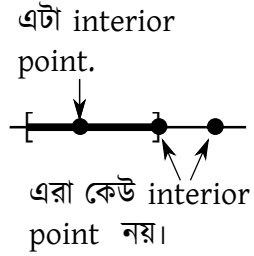
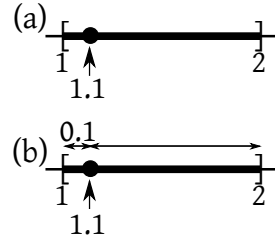



Fig 4 **Fig 5**

For example, $\frac{1}{3}$ is an interior point of $[0, 1]$, but 1 and 1.2 are not.

■

Example 2: Prove that 1.1 is an interior point of $[1, 2]$.

SOLUTION: প্রথমে ছবিটা এঁকে নিই (Fig 5)। তার পর কি দেখাতে হবে সেটা অংকের ভাষায় লিখে নিই--

To show 1.1 is an interior point of $[1, 2]$, *i.e.*,

$\exists \epsilon > 0 \quad N(1.1, \epsilon) \subseteq [1, 2]$.

দেখাই যাচ্ছে যে 1.1-এর দুই দিকেই বেশকিছুটা হাত-পা খেলাবার জায়গা আছে। কতটা আছে? বাঁদিকে $1.1 - 1 = 0.1$ আর ডানদিকে $2 - 1.1 = 0.9$. এ দুয়ের মধ্যে ছোটো হল 0.1. তার মানে দু দিকেই অন্ততঃ 0.1 পরিমাণ জায়গা আছে। সুতরাং আমরা $\epsilon = 0.1$ নিতে পারি। লক্ষ কর যে এখানে আমরা 0.1-এর চেয়ে ছোটো ϵ-ও নিতে পারতাম, যেমন $\epsilon = 0.05$ নিলেও চলত। যাই হোক আমরা এই উদাহরণে $\epsilon = 0.1$-ই নেব।

$\exists \epsilon$ Choose $\epsilon = \min\{1.1 - 1, 2 - 1.1\} = 0.1 > 0$.

Then $N(1.1, 0.1) = (1.1 - 0.1, 1.1 + 0.1) = (1, 1.2) \subseteq [1, 2]$, as required.

■

Example 3: Prove that 1.5 is not an interior point of $[1.5, 2]$.

SOLUTION:
Fig 6 দ্যাখো। কি দেখাতে হবে লিখে নিই--

Fig 6

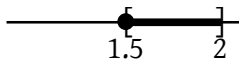
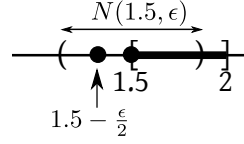



Fig 7

To show 1.5 is not an interior point of $[1.5, 2]$, *i.e.*,

$\forall \epsilon > 0 \quad N(1.5, \epsilon) \not\subseteq [1.5, 2]$.

এটা কি করে পেলাম? স্রেফ interior point-এর definition-টার negation নিয়ে! মানে গোড়ার $\exists$-টাকে উল্টে $\forall$ বানিয়ে, আর $\subseteq$-এর জায়গায় $\not\subseteq$ লিখে।
এবার প্রথমে যেহেতু $\forall \epsilon > 0$ আছে, তাই--

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার কাজ এইটা দেখানো যে $N(1.5, \epsilon) \not\subseteq [1.5, 2]$, মানে এমন একটা $y \in N(1.5, \epsilon)$ বার করা যাতে $y \notin [1.5, 2]$ হয়। অংকের ভাষায় লিখে নেওয়া যাক--

To show $N(1.5, \epsilon) \not\subseteq [1.5, 2]$, *i.e.*,

$\exists y \in N(1.5, \epsilon) \quad y \notin [1.5, 2]$.

দ্যাখো, একটা জিনিস check করতে গিয়ে কি রকম একটা নতুন target এসে গেল। আমরা অংকের প্রমাণের সঙ্গে খেলার ধারা বিবরণীর উপমা দিয়েছিলাম মনে আছে? এখানে যেন খেলাটা এক কিস্তিতে শেষ হল না, আবার পেনাল্টি অব্‌ধি গড়াল। একটা নতুন $\exists y$ এসে গেল। অতএব একটা y পেতে হবে। Fig 7 থেকে দেখছি যে $y = 1.5 - \frac{\epsilon}{2}$ নিলে কাজ চলবে--

$\exists y$ Choose $y = 1.5 - \frac{\epsilon}{2}$.

Then $y \in N(1.5, \epsilon)$ but $y \notin [1.5, 2]$.
So $N(1.5, \epsilon) \not\subseteq [1.5, 2]$, as required.

■

Exercise 5: দ্যাখাও যে নীচের প্রতিটি ক্ষেত্রেই a সংখ্যাটা S set-এর একটা interior point, কিন্তু b সংখ্যাটা নয়। ছবি আঁকতে ভুলো না!

1. $S = [10, 20], \quad a = 12, \quad b = 20.$
2. $S = (-1, \infty), \quad a = 0, \quad b = -2.$

3. $S = [1,3) \cup [2,4), \quad a = 2, \quad b = 1.$

■

1.2 Boundary point

Interior point শেখা হল, এবার boundary point-এর definition শিখি। Boundary point-রা set-এর ভিতরেও থাকতে পারে, বাইরেও থাকতে পারে। ভিতরের boundary point হল তারা যারা সামান্যতম সরলেই set-এর বাইরে বেরিয়ে যেতে পারে। আর বাইরের boundary point-রা একইভাবে সামান্যতম সরলেই set-এর ভিতরে ঢুকে পড়তে পারে। এই দুটোকে এক সঙ্গে মিলিয়ে লেখা যায়--

$\forall \epsilon > 0$ $N(a,\epsilon)$-এর কিছু অংশ set-এর বাইরে পড়বে, আর কিছুটা set-এর ভিতরে থাকবে।

> **DEFINITION: Boundary point**
>
> Let $S \subseteq \mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{R}$. We say "a is a boundary point of S" to mean
>
> $$\forall \epsilon > 0 \quad N(a,\epsilon) \cap S \neq \phi \text{ and } N(a,\epsilon) \cap S^c \neq \phi$$

Example 4: প্রমাণ কর--1 সংখ্যাটা $[0,1)$ set-টার একটা boundary point.

SOLUTION: প্রথমে লিখে নিই কি দেখাতে হবে--

To show 1 is a boundary point of $[0,1)$, *i.e.*,

$\forall \epsilon > 0 \quad N(1,\epsilon) \cap [0,1) \neq \phi$ and $N(1,\epsilon) \cap [0,1)^c \neq \phi$.

$\forall \epsilon > 0$ দিয়ে শুরু, অতএব--

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

দেখাতে হবে যে $N(1,\epsilon) \cap [0,1) \neq \phi$ এবং $N(1,\epsilon) \cap [0,1)^c \neq \phi$. প্রথমে দেখাই $N(1,\epsilon) \cap [0,1) \neq \phi$. এর মানে হল এমন কোনো y পাব যেটা $N(1,\epsilon)$-এও আছে, আবার $[0,1)$-এও আছে। অংকের ভাষায়

First shall show $N(1,\epsilon) \cap [0,1) \neq \phi$, *i.e.*,

$\exists y \in N(1,\epsilon) \cap [0,1)$.

এরকম একটা y হতে পারত $1 - \frac{\epsilon}{2}$, খালি ϵ-টা বেশী বড় হয়ে গেলে সেটা আবার 0-র চেয়ে ছোটো হয়ে যাবে। তাই y নেব এইভাবে--

$\exists y$ Choose $y = \max\{0, 1 - \frac{\epsilon}{2}\}$.

Then $y \in N(1,\epsilon)$ and $y \in [0,1)$.

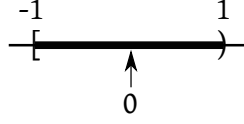



Fig 8

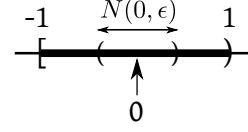



Fig 9

So $N(1,\epsilon)\cap[0,1)\neq\phi$.

এবার একইভাবে দেখাব যে $N(1,\epsilon)\cap[0,1)^c\neq\phi$.

■

Example 5: $[-1,1)$-এ কি 0 একটা boundary point?

SOLUTION: Fig 8 দেখে বুঝছি যে উত্তর হবে--না।
অংকের ভাষায় লিখে নিই--

To show 0 is not a boundary point of $[-1,1)$,

দেখাতে হবে যে 0 এখানে boundary point নয়, তাই অংকের ভাষায় লেখার সময়ে boundary point-এর definition-টার negation করব ($\forall$-গুলোকে $\exists$, আর $\exists$-গুলোকে $\forall$ করে দেব, এবং সবচেয়ে ভিতরের জিনিসটাকে উল্টে দেব)।

i.e.,

$\exists\epsilon>0\quad N(0,\epsilon)\cap[-1,1)=\phi$ or $N(0,\epsilon)\cap[-1,1)^c=\phi$.

লক্ষ কর "and"-টা কি রকম negation-এর ধাক্কায় "or" হয়ে গেল।
প্রথমে আছে $\exists\epsilon>0$, তাই ϵ নির্বাচন দিয়ে শুরু করতে হবে। আমাদের দুটো জিনিসের একটা দেখাতে হবে--হয় $N(0,\epsilon)\cap[-1,1)=\phi$ নয় $N(0,\epsilon)\cap[-1,1)^c=\phi$. এর মধ্যে কোনটা দেখাব? Fig 9-র দিকে তাকালেই বুঝবে যে আমাদের ক্ষেত্রে দ্বিতীয়টা ঠিক, অর্থাৎ আমরা এমনভাবে $\epsilon>0$ নিতে পারব যাতে $N(0,\epsilon)\cap[-1,1)^c=\phi$ হয়। $\epsilon=\frac{1}{2}$ নিলেই হবে।

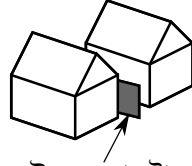



Fig 10

$\exists\epsilon$ Choose $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Then $N(0,\epsilon) = N(0,\frac{1}{2}) \subseteq [-1,1)$,
$\therefore N(0,\epsilon) \cap [-1,1)^c = \phi$, as required.

■

Exercise 6: দ্যাখাও যে নীচের প্রতিটি ক্ষেত্রেই a সংখ্যাটা S set-এর একটা boundary point, কিন্তু b সংখ্যাটা নয়। ছবি এঁকো।

1. $S = [10, 20]$, $a = 10$, $b = 21$.
2. $S = (-1, \infty)$, $a = -1$, $b = 2$.
3. $S = [1, 3) \cup [2, 4)$, $a = 4$, $b = 2$.
4. $S = \{1, 2, 3\}$, $a = 2$, $b = 0$.

■

দুটো পাশাপাশি বাড়ির মাঝখানে যে দেওয়াল থাকে (Fig 10) সেটা এই দিকের বাড়ির boundary wall-ও বটে আবার ওদিকের বাড়িটার boundary wall-ও বটে। একই কথা খাটে boundary point-দের ক্ষেত্রেও। Boundary point-রা একটা set-কে তার complement-এর থেকে আলাদা করে রাখে। তাই A-র boundary point আর A^c-এর boundary point একই জিনিস--

Exercise 7: Let $A \subseteq \mathbb{R}$ and $x \in \mathbb{R}$. Prove that x is a boundary point of A if and only if it is a boundary point of A^c. ■

1.3 Interior set

কোনো set S-এর **interior set** হল তার যাবতীয় interior point-এর set. ব্যাপারটাকে আরেকভাবেও ভাবা যায়, একটা set-এর ভিতরে যত boundary point আছে, তাদেরকে যদি set থেকে বার করে দেওয়া হয়, তবে যেটুকু পড়ে থাকে সেটাই হল তার interior set. অনেক সময় interior set-কে খালি **interior**-ও বলে। লেখার সময়ে S-এর interior-কে লিখি S°. পড়ার সময়ে পড়ি "S interior".

Example 6: $(0, 1]$-এর interior set বার কর।

SOLUTION: $(0,1]$-এর ভিতরে একটাই boundary point আছে, 1. (আরেকটা boundary point-ও আছে, 0, কিন্তু সেটা set-টার বাইরে আছে বলে আমাদের মাথাব্যথা নেই।) যদি 1 সংখ্যাটাকে $(0,1]$ থেকে বার করে দিই, তবে পড়ে থাকে $(0,1)$, এবং এটাই হল $(0,1]$-এর interior set. ■

একটা set-এর interior set হল যেন set-টা শাঁস, আর boundary point-গুলো যেন খোসা। সেই অর্থে $[0,1]$ যেন একটা খোসা-সুদ্ধ আম, $(0,1)$ অংশটা হল শাঁসটা, বাঁদিকে 0 আর ডানদিকে 1 এই শাঁসটাকে খোসার মত ঘিরে রেখেছে। একইভাবে, $[0,1)$ হল অর্ধেক খোসা ছাড়ানো আম, বাঁদিকের খোসাটা আছে, ডানদিকেরটা ছাড়ানো হয়েছে। আর set-টা যদি হত $(0,1)$, তবে সেটা হল পুরো খোসা-ছাড়ানো আম।

Exercise 8: $\{1,2,3\}$-এর interior set কি? ■

Example 7: Define interior of a set $S(\subset \mathbb{R})$[1] **(2003)**

SOLUTION:

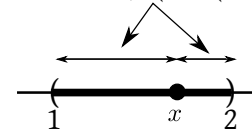
> DEFINITION: **Interior of a set**
>
> The set S° of all interior points of a set S is called the interior of S, ie, $x \in S^\circ$ iff
> $$\exists \epsilon > 0 \ N(X,\epsilon) \subseteq S.$$

■

DAY 2
Open and closed sets

2.1 Open set

Open set অনেকটা খোলা মাঠের মত ব্যাপার, যেখানেই দাঁড়াও না কেন, দুপাশে হাতপা খেলানোর খানিকটা জায়গা পাবে। কোথাও দেয়ালে পিঠ ঠেকে যাবার ভয় নেই।

Example 8: Fig 11 দেখে বলো $(1,2]$ set-টা কি open? আর $(1,2)$ set-টা? (Fig 12 দ্যাখো।)

SOLUTION: $(1,2]$ open নয়, কারণ 2-তে দাঁড়ালে ডানদিকে কোনো ফাঁকা জায়গা নেই। কিন্তু $(1,2)$-এর বেলায় সেরকম কোনো ঝামেলা নেই, যেহেতু 1 বা 2 কেউই set-টার ভিতরে নেই। তাই যাই $x \in (1,2)$ নিই না কেন, সেটার দুধারে খানিকটা ফাঁকা জায়গা পাওয়া যাবে। ■

এবার open set-এর definition অংকের ভাষায় লেখার চেষ্টা করি--
আমরা বলেছি যে একটা set open হওয়া মানে

> set-টার যে point-এই দাঁড়াই, দুপাশে খানিকটা ফাঁকা জায়গা পাব set-এর মধ্যে,

অর্থাৎ, যদি set-টার নাম হয় S,

> $\forall x \in S$ যদি x point-এ দাঁড়াই তবে দুপাশে খানিকটা ফাঁকা জায়গা পাব set-এর মধ্যে,

অর্থাৎ, যদি দুপাশে ফাঁকা জায়গার পরিমাণটাকে $\epsilon > 0$ বলি,

> $\forall x \in S \quad \exists \epsilon > 0$ যাতে x-কে ঘিরে $\epsilon > 0$ পরিমাণ জায়গা পাব S-এর মধ্যে।

ঠিক এই কথাটাই গুছিয়ে লিখব নীচের প্রশ্নের উত্তরে--

Example 9: Define open set in $\mathbb{R}$.[1] **(2003,2001)**

SOLUTION:

DEFINITION: **Open set**

A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is called open in $\mathbb{R}$ if

$$\forall x \in S \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(x, \epsilon) \subseteq S.$$

■

এইবার দেখি এই definition ব্যবহার করে কি ভাবে কোনো set-কে open বা open নয় দেখাতে হয়।

Example 10: Show that $(1,2)$ is open in $\mathbb{R}$.

SOLUTION: প্রথমে লিখে নিই কি দেখাতে হবে

To show $(1,2)$ is open in $\mathbb{R}$, *i.e.*,

$$\forall x \in (1,2) \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(x, \epsilon) \subseteq (1,2).$$

প্রথমেই আছে $\forall x \in (1,2)$. সুতরাং--

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in (1,2)$.

এবার আছে $\exists \epsilon > 0$. তার মানে একটা জুৎসই ϵ পেতে হবে। তার জন্য একটু ছবি এঁকে নিই (Fig 13)। আমাদের ϵ নিতে হবে দুদিক বাঁচিয়ে, তাই--

$\exists\epsilon$ Choose $\epsilon = \min\{x-1, 2-x\} > 0$.

এবার খালি দেখাতে হবে যে $N(x,\epsilon) \subseteq (1,2)$ হয়। তার জন্য আমরা $N(x,\epsilon)$ থেকে যে কোনো y নিয়ে দেখাব যে সেটা $(1,2)$-তেও আছে।

To show $N(x,\epsilon) \subseteq (1,2)$, *i.e.*,

$\forall y \in N(x,\epsilon) \quad y \in (1,2)$.

$\forall y$ Take any $y \in N(x,\epsilon)$.

Then $y > x - \epsilon \geq x - (x-1) = 1$.

Also $y < x + \epsilon \geq x + (2-x) = 2$.

So $y \in (1,2)$.

Hence $N(x,\epsilon) \subseteq (1,2)$, as required.

■

Example 11: Show that $(1,2]$ is not open in $\mathbb{R}$.

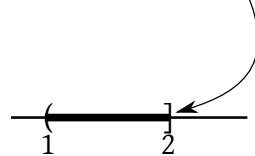
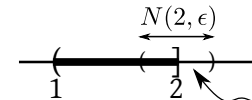
SOLUTION:

To show $(1,2]$ is not open in $\mathbb{R}$, *i.e.*,

$\exists x \in (1,2] \quad \forall \epsilon > 0 \quad N(x,\epsilon) \not\subseteq (1,2]$.

এটা পেলাম open-এর definition-টার negation নিয়ে, অর্থাৎ $\forall$-কে $\exists$, এবং $\exists$-কে $\forall$ ইত্যাদি করে। প্রথমে $\exists x$ আছে। তার মানে একটা x বার করে প্রমাণ শুরু করতে হবে। Fig 14 দেখে বুঝতে পারছি যে ঝামেলাজনক point-টা হল 2. তাই--

$\exists x$ Choose $x = 2$.

এর পর আছে $\forall\epsilon$ সুতরাং--

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার দেখাতে হবে $N(x,\epsilon) \not\subseteq (1,2]$, অর্থাৎ এমন কোনো point y পাব, যেটা $N(x,\epsilon)$-এর আছে, কিন্তু $(1,2]$-তে নেই। অংকের ভাষায়--

$$\exists y \in N(x,\epsilon) \quad y \notin (1,2].$$

সুতরাং আবার একটা $\exists$ এসেছে। Fig 15 দেখে বুঝছি যে $y = 2 + \frac{\epsilon}{2}$ নেওয়া যায়--

To show $N(x,\epsilon) \not\subseteq (1,2]$, *i.e.*,

$\exists y \in N(x,\epsilon) \quad y \notin (1,2]$.

Choose $y = 2 + \frac{\epsilon}{2}$.

Then $y \in N(2,\epsilon)$ but $y \notin (1,2]$.
So $N(x,\epsilon) \not\subseteq (1,2]$, as required.

■

Example 12: Show that the set

$$S = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| + |x-2| < 3\}$$

is an open set.[3] **(2006)**
SOLUTION: এই অংকে set-টা একটু গোলমেলে ভাবে দিয়েছে। প্রথমে দেখি এর মধ্যে কোন কোন point আছে। লক্ষ কর যে $|x-1|$ হল x থেকে 1-এর দূরত্ব। একইভাবে $|x-2|$ হল x থেকে 2-এর দূরত্ব। তার মানে আমরা S হল সেই সব x-এর set যাদের 1 আর 2 থেকে মোট দূরত্ব 3-এর চেয়ে কম Fig 16). সুতরাং বোঝা যাচ্ছে যে S-এর element-রা সবাই 1 আর 2-এর ধারে কাছেই থাকতে বাধ্য। প্রথমে দেখি x যদি 1-এর বাঁদিকে থাকে, তবে কতটা দূরে যেতে পারে--

Let $x \in S$.
If $x < 1$, then

$$|x-1| + |x-2| = (1-x) + (2-x) = 3 - 2x < 3,$$

Fig 16

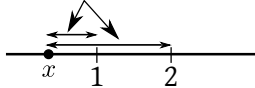
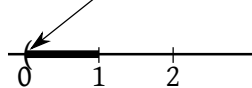
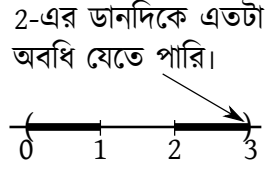
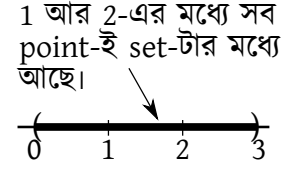



Fig 17

Fig 18

Fig 19

> or $x > 0$.

তার মানে x বাঁদিকে 0-র আগে অবধি যেতে পারে Fig 17). এবার দেখি x যদি 2-এর ডানদিকে যায়, তবে কতদূর যেতে পারে--

> If $x \geq 2$, then
> $$|x-1| + |x-2| = (x-1) + (x-2) = 2x - 3 < 3,$$
> or $x < 3$.

তার মানে ডানদিকে শেষসীমা হল 3-এর ঠিক আগে Fig 18). আর x যদি 1 আর 2-এর মাঝখানে থাকে?

> If $1 \leq x < 2$, then
> $$|x-1| + |x-2| = (x-1) + (2-x) = 1 < 3,$$
> which is always true.

অতএব মাঝের সব point-ই S-এর মধ্যে আছে Fig 19). সুতরাং সব মিলিয়ে দাঁড়ালো--

> So $S = (0, 3)$.

আমরা তো জানিই যে $(0, 3)$-কে কি করে open in $\mathbb{R}$ দেখাতে হয়--

> Now $(0, 3)$ is open because $\forall x \in (0, 3)$ we can take $\epsilon = \min\{x, 3-x\}$ such that $N(x, \epsilon) \subseteq (0, 3)$.

■

Example 13: আচ্ছা, ϕ কি open set in $\mathbb{R}$?

SOLUTION:

> Yes, ϕ is an open set.
> Since there is no point $x \in \phi$, so the definition of openness
> $$\forall x \in \phi \quad \epsilon > 0 \quad N(x, \epsilon) \subseteq \phi$$

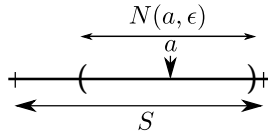



Fig 20

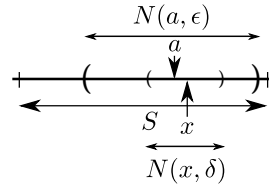



Fig 21

is vacuously true.

■

Example 14: Show that S° is the largest open subset of S.[2] **(2005)**

SOLUTION: প্রমাণটা আমরা দুই ধাপে করব। প্রথমে দেখাব যে S° একটা open set, এবং তার পরে দেখাব যে S° হচ্ছে S-এর সবচেয়ে বড় open subset.

Let $S \subseteq \mathbb{R}$.

Step I: To show: S° is open, *i.e.*,

$\forall a \in S^\circ \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(a, \epsilon) \subseteq S^\circ$.

গোড়ায় $\forall a \in S^\circ$ আছে অতএব--

$\boxed{\forall a}$ If $S^\circ = \phi$, then vacuously true.

Otherwise, take any $a \in S^\circ$.

এই বার একটা $\exists \epsilon > 0$ রয়েছে, সুতরাং কিছু রাফ্ করে ছকে নিতে হবে যে একটা জুৎসই ϵ কিভাবে নেওয়া যায়। প্রথমে ভেবে দেখি "$a \in S^\circ$" মানে কি। এর মানে a হচ্ছে S-এর interior point. অর্থাৎ a-কে ঘিরে S-এর মধ্যে খানিকটা ফাঁকা জায়গা আছে (Fig 20)।

$\because a \in S^\circ, \ \therefore \exists \epsilon > 0 \ N(a, \epsilon) \subseteq S$.

$\boxed{\exists \epsilon}$ Choose this $\epsilon > 0$.

এবার দেখাব যে এই ϵ-কে দিয়েই আমাদের কাজ চালানো যাবে, অর্থাৎ $N(a, \epsilon)$ কেবল S-এরই subset নয়, এটা S°-এরও subset.

আবার একটা $\forall$ এসেছে, সুতরাং--

$\forall x$ Take any $x \in N(a,\epsilon)$.

Fig 21 দ্যাখো। দেখাতে হবে যে এই x-টা S°-এর মধ্যে পড়ে, অর্থাৎ x-কে ঘিরে S-এর মধ্যে কিছুটা ফাঁকা জায়গা আছে। এখন এটা তো দেখাই যাচ্ছে যে x-কে ঘিরে $N(a,\epsilon)$-এর মধ্যেই খানিকটা ফাঁকা জায়গা রয়েছে, আর $N(a,\epsilon)$ নিজেই রয়েছে S-এর মধ্যে। গুছিয়ে লিখলে হয়--

$\because N(a,\epsilon)$ is open and $x \in N(a,\epsilon)$,

$$\therefore \exists \delta > 0 \quad N(x,\delta) \subseteq N(a,\epsilon) \subseteq S.$$

সুতরাং x-কে ঘিরে S-এর মধ্যে কিছুটা ফাঁকা জায়গা বার করে দিয়েছি--

Hence $x \in S^\circ$.

এখন x ছিল $N(a,\epsilon)$-এর যেকোনো point. তাই--

Since $x \in N(a,\epsilon)$ was arbitrary, so $N(a,\epsilon) \subseteq S^\circ$.

আবার একইভাবে a ছিল S°-এর যে কোনো point. সুতরাং

Since $a \in S^\circ$ was arbitrary, S° must be open, as required.

এবার দেখাতে হবে যে S° হল S-এর সবচেয়ে বড় open subset. অর্থাৎ যদি যেকোনো open subset A নিই তবে S° হবে তার চেয়েও বড়, মানে $A \subseteq S^\circ$.

Step 2: For any $A \subseteq S$ if A is open in $\mathbb{R}$, then shall show that $A \subseteq S^\circ$, *i.e.*,

$\forall a \in A \quad a \in S^\circ$.

$\forall a$ Take any $a \in A$.

$\because A$ is open,

$$\therefore \exists \epsilon > 0 \quad N(a,\epsilon) \subseteq A \subseteq S.$$

$\therefore a \in S^\circ$.

Thus, $A \subseteq S^\circ$, as required.

■

2.1.1 Union/intersection

যদি বলি যে $(0,1) \cup (2,3)$-কে open দেখাতে হবে, তবে কি করবে? একটা point a নেবে এই set-টা থেকে। সেটা হয় $(0,1)$-এ নয় $(2,3)$-তে পড়বে। কিন্তু এই দুটো set-ই যেহেতু নিজেরা open তাই যেটাতেই পড়ুক না কেন point-টা হাত-পা খেলানোর জন্য খানিকটা জায়গা পাবে। ফলে $(0,1) \cup (2,3)$ হবে একটা open set. একই যুক্তি খাটবে যদি যে কোনো সংখ্যক open set-এর union নিই।

> **THEOREM**
> The union of any arbitrary collection of open sets of real numbers is an open set.

Proof: প্রথমে একটা open set-এর arbitrary collection নিয়ে শুরু করি। কি করে set-এর collection লিখতে হয় index set দিয়ে, মনে আছে তো? না থাকলে দ্বিতীয় অধ্যায় দেখে নাও।

> Let $\{A_i \;:\; i \in I\}$ be any collection of open sets in $\mathbb{R}$, where I is n arbitrary index set.

এবার লিখি কি দেখাতে হবে--

> Shall show: $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ is open, *i.e.*,
> $\forall a \in A \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(a, \epsilon) \subseteq A.$

প্রথমেই $\forall a \in A$আছে, তাই--

> $\boxed{\forall a}$ Take any $a \in A$.

এবার একটা $\epsilon > 0$ বার করতে হবে।

> Then $a \in A_i$ for some A_i.
> Since A_i is open,
> $$\exists \epsilon > 0 \quad N(a, \epsilon) \subseteq A_i.$$
> $\boxed{\exists \epsilon}$ Choose this $\epsilon > 0$.

এই হল আমাদের প্রয়োজনীয় ϵ. এবার দেখাব যে $N(a, \epsilon) \subseteq A$.

> $\because A_i \subseteq A \;\therefore N(a, \epsilon) \subseteq A$, as required.

[Q.E.D]

আমরা দেখেছি যে open interval-রা open set হয়, এবং open set-দের union সর্বদা open হয়। সুতরাং কিছু open interval-এর union নিলে একটা open set পাবে। মজা হল এর উল্টোদিকটাও সত্যি! মানে যেকোনো (nonempty) open set-কেই কিছু open interval-এর union হিসেবে লিখে ফেলা যায়। প্রমাণটা এক্কেবারে সোজা--

Example 15: Show that every nonempty open set can be expressed as a union of open intervals.[2] **(2013.2c)**

SOLUTION:

> Let $A \neq \phi$ be an open subset of $\mathbb{R}$.
> Then $\forall a \in A \quad \exists \epsilon_a > 0 \quad N(a, \epsilon_a) \subseteq A.$

এখানে হঠাৎ খালি ϵ না লিখে ϵ_a লিখলাম কেন? কারণ এখানে আমরা বিভিন্ন a-র জন্য পাওয়া বিভিন্ন ϵ নিয়ে একই সঙ্গে কাজ করব। তাই কোন ϵ-টা কোন a-র জন্য সেটা খেয়াল রাখার জন্য ϵ_a লিখেছি। ঠিক যেমন "সব মেয়েরই একটা কুকুর আছে" লেখার জন্য

$$\forall g \in GIRL \quad \exists d \in DOG \quad g \text{ has } d$$

লিখলেই চলে। কিন্তু এবার যদি মেয়েরা সবাই তাদের কুকুরকে নিয়ে কোনো কুকুর-প্রদর্শনীতে যায় তবে কুকুরের গলায় তাদের মালিকের নাম লেখা বক্‌লস্ লাগিয়ে দেওয়া ভালো। অংকের ভাষায়

$$\forall g \in GIRL \quad \exists d_g \in DOG \quad g \text{ has } d_g.$$

তবে একাধিক মেয়ের কুকুরদের নিয়ে একসঙ্গে কাজ করতে না হলে d_g না লিখে খালি d লিখলেই চলে। আমাদের অংকে ফিরে আসি। লক্ষ কর যে $N(a,\epsilon_a)$-রা সবাই open interval. এদের union নিলেই তো পুরো A-টা পেয়ে যাব!

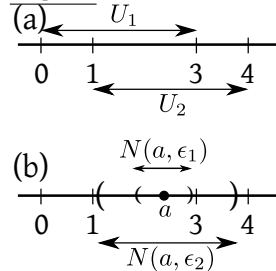
> Shall show that
>
> $$A = \underbrace{\bigcup_{a\in A} N(a,\epsilon_a)}_{B}.$$
>
> $\because \forall a \in A \quad N(a,\epsilon_a) \subseteq A,$
>
> $\therefore B \subseteq A.$
>
> Also $\forall a \in A \quad a \in N(a,\epsilon_a) \subseteq B.$
>
> So $A \subseteq B.$
>
> Hence $A = B$, as required.

■

Example 16: Show that the intersection of a finite number of open sets is an open set. With the help of a suitable example show that the intersection of an infinite collection of open sets need not always be an open set.[3+1] **(2011,2005,1999)**

SOLUTION: প্রথমে কিছু finite সংখ্যক open set নেওয়া যাক।

> First part:
>
> Let $U_1, ..., U_n$, be finitely many open sets for some $n \in \mathbb{N}$.

Fig 22(a)-তে একটা উদাহরণ দেখানো হয়েছে, দুটো open set দিয়ে-- $U_1 = (0,3)$ আর $U_2 = (1,4)$. আমরা প্রমাণটা করব যে কোনো n-এর জন্য, কিন্তু চিন্তা করার সুবিধার জন্য মনে মনে এই দুটো set-এর কথাই ভাবব। যদি n-খানা set-এর intersection নিই তবে পাব $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$. আমরা লেখার সুবিধার জন্য এর নাম দেব U.

Let $U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$.

এটাকে open দেখানো মানে U-এর প্রতিটি point-কে ঘিরে খানিকটা করে ফাঁকা জায়গা আছে দেখানো--

To show:
$\forall a \in U \exists \epsilon > 0 \quad N(a, \epsilon) \subseteq U$.

এই পর্যন্ত হল গৌরচন্দ্রিকা, সমস্যাটাকে গুছিয়ে অংকের ভাষায় লেখা। এইবার আসল প্রমাণের শুরু। গোড়াতেই আছে "$\forall a \in U$" সুতরাং প্রমাণের শুরু হবে এইভাবে--

$\boxed{\forall a}$ If $U = \phi$, then it is vacuously true.
Otherwise take any $a \in U$.

Fig 22(b)-তে a-কে একটা কালো বিন্দু হিসেবে দেখানো হয়েছে।
এর পর আছে "$\exists \epsilon > 0$"। যখনই $\exists$ থাকে তখনই একটু রাফ্ করে নিলে সুবিধে হয়। যেহেতু a আছে U-এর মধ্যে, আর U হল সবগুলো U_i-এর intersection, তাই a সবগুলো U_i-এর ভিতরেই আছে। এদিকে U_i-গুলো আবার নিজেরা open. সুতরাং U_i-গুলোকে আলাদা করে দেখলে ওদের প্রত্যেকের মধ্যেই a-কে ঘিরে খানিকটা করে ফাঁকা জায়গা আছে।

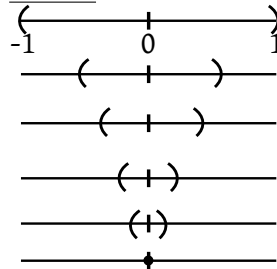
$\because a \in U \quad \therefore \forall i \in \{1, ..., n\} \quad a \in U_i$.
But since each U_i is open,

$$\therefore \exists \epsilon_i > 0 N(a, \epsilon_i) \subseteq U_i.$$

আবার Fig 22(b) দ্যাখো। লক্ষ কর যে আমরা বিভিন্ন U_i-এর ক্ষেত্রে বিভিন্ন ϵ_iনিয়েছি, কারণ U_i-দের সাপেক্ষে a-র অবস্থান তো আমরা জানি না। যদি a-টা কোনো U_i-এর মধ্যে একেবারে ধার ঘেঁষে পড়ে তবে তার ক্ষেত্রে ϵ_i-টা ছোটো নিতে হবে, যেমন ছবিতে ϵ_1-টা ছোটো নিতে হয়েছে। আবার যদি a-টা U_i-এর মাঝখানে পড়ে তবে ϵ_i বড়ো নেওয়া চলবে, যেমন ছবিতে ϵ_2-এর ক্ষেত্রে।
এবার আমরা করব কি সবচেয়ে ছোটো ϵ_i-টা নেব। এটাই হবে আমাদের প্রয়োজনীয় ϵ.

$\boxed{\exists \epsilon}$ Choose $\epsilon = \min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\} > 0$.

তাহলে a-কে ঘিরে অন্ততঃ $N(a, \epsilon)$ জায়গাটুকু সব U_i-এর ভিতরেই পাব।

Fig 23

Take any $i \in \{1, ..., n\}$. Then

$$N(a, \epsilon) \subseteq N(a, \epsilon_i) \subseteq U_i.$$

So

$$N(a, \epsilon) \subseteq U,$$

as required.

কিন্তু infinite সংখ্যক open set-এর intersection-এর বেলায় একই যুক্তি নাও খাটতে পারে। কারণটা এই রকম-- যত বেশি open set নেব ততই হাত-পা খেলানোর জায়গা কমে আসবে। যদি infiniteসংখ্যক open set নিই, তবে এমন হতেই পারে যে জায়গাটুকু কমতে কমতে একেবারে শূন্য হয়ে গেল। কিন্তু খালি "হতেই পারে" বললে তো প্রমাণ হয় না। তার জন্য দস্তুরমত একটা উদাহরণ দেখাতে হবে, যাকে বলে
counterexample. এরকম একটা counterexample দেওয়া হয়েছে Fig 23-এ। এখানে $U_1 = (-1, 1)$, $U_2 = (-1/2, 1/2)$, তারপর $U_3 = (-1/3, 1/3)$ এইভাবে open set-গুলো ক্রমশঃই ছোটো হতে থাকবে। ছোটো হতে হতে একেবারে শূন্যর দিকে চলে যাবে।

Second part:

Infinite intersection of open sets need not be open.

For example, take $U_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ for $n \in \mathbb{N}$.

সবগুলো U_n-এর intersection নিলে পাব $\{0\}$. কেন $\{0\}$ হবে সেটা ভেবে দেখা যাক। 0 যে সবগুলো U_n-এর মধ্যেই আছে এতে কোনো সন্দেহের অবকাশ নেই। কিন্তু 0 ছাড়া আর কেউ যে intersection-টার মধ্যে নেই সেটা কি করে জানলাম? একটা উদাহরণ নিলেই সেটা বোঝা যাবে। ধর, 0.001 কি intersection-টার মধ্যে থাকতে পারে? না, কারণ $n > 1000$ নিলে $1/n < 0.001$ হবে, তাই 0.001 সেই সব U_n-এর বাইরে পড়ে যাবে। এইভাবে তুমি যাই $x \neq 0$ নাও না কেন, একসময়ে n যথেষ্ট বড় হলে $x \notin \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ হয়ে যাবে।

Then

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\},$$

which is not open.

$\{0\}$ একটা open set নয় কারণ 0 তো মোটে একটাই সংখ্যা, তাই 0-কে ঘিরে $\{0\}$-র মধ্যে কোনোই ফাঁকা জায়গা নেই। ■

2.2 Closed set

আমরা একধরণের set শিখেছি--open set. এবার আরেক ধরণের set শিখব, তাকে বলে closed set. নাম শুনেই বুঝতে পারছ, যে জিনিসটা open set-এর উল্টো কিছু একটা। Closed set-এর সংজ্ঞা দুভাবে দেওয়া যায়। তার মধ্যে একটা এখন শিখব, অন্যটা পরের অধ্যায়ে। প্রথম সংজ্ঞা অনুযায়ী একটা set $S \subseteq \mathbb{R}$-কে বলে closed যদি S^c হয় open.

DEFINITION: Closed set (using complement)

A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is called <u>closed in $\mathbb{R}$</u> if S^c is open in $\mathbb{R}$.

তার মানে একটা set দিয়ে তাকে closed দেখাতে বলা মানে তার complement-টাকে open দেখাতে বলা, যেমন যদি জানতে চাই $(-\infty, 1]$ একটা closed set কিনা, তুমি তৎক্ষণাৎ তার complement বার করবে

$$(-\infty, 1]^c = (1, \infty),$$

এবং দেখবে সেটা open কিনা। যেহেতু $(1, \infty)$ হল open, তাই তুমি বলবে যে $(-\infty, 1]$ ছিল closed.

Example 17: $[0, 1]$ কি closed? হ্যাঁ, কারণ এর complement হল $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, যেটা open. ■

Example 18: $[0, 2)$ কি closed? এর complement হল $(-\infty, 0) \cup [2, \infty)$, যেটা open নয়, কারণ 2-এর দুদিকে হাত-পা খেলাবার জায়গা নেই। সুতরাং $[0, 2)$ একটা closed set নয়। ■

Example 19: $\{0, 1, 2\}$ কি closed? এর complement হল $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$. যেহেতু এই set-টা open, তাই $\{0, 1, 2\}$ হল closed. ■

Example 20: $\mathbb{N}$ কি closed?

SOLUTION: হ্যাঁ, কারণ $\mathbb{N}^c = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup \cdots$, যেটা open. ■

Exercise 9: Is $\mathbb{Z}$ closed in $\mathbb{R}$? ■

Exercise 10: ইংরাজিতে open আর closed হল বিপরীতার্থক শব্দ। অংকের জগতে কিন্তু এরা ঠিক বিপরীত নয়। এমন set আছে যারা open-ও নয় আবার closed-ও নয়। উপরের অংকগুলোর মধ্যে এরকম একটা উদাহরণ আছে। সেটা কি বল তো? ■

Example 21: আমরা আগে দেখেছি যে ϕ এবং $\mathbb{R}$ এরা দুজনেই open. এদের complement-রা হল যথাক্রমে $\mathbb{R}$ এবং ϕ. তার মানে $\mathbb{R}$ এবং ϕ একই সঙ্গে closed এবং open! ■

Open-ও নয়, closed-ও নয় এরকম set $\mathbb{R}$-এর মধ্যে প্রচুর আছে। কিন্তু একই সঙ্গে closed এবং open এরকম set আছে খালি দুটোই--ϕ আর $\mathbb{R}$ স্বয়ং।

Example 22: Cite an example of a set which is both open and closed, and that of a set which is neither open nor closed.[1+1] **(2008)**

SOLUTION: $\mathbb{R}$-এর মধ্যে কেবল মাত্র দুটো set আছে যারা একইসঙ্গে open এবং closed. একজন হচ্ছে ϕ এবং অন্যজন $\mathbb{R}$ স্বয়ং। আমরা এখানে উদাহরণ হিসেবে $\mathbb{R}$-কেই দেব, কারণ সেটার ক্ষেত্রে যুক্তিটা লেখা সহজতর।

> $\mathbb{R}$ is a set which is both open and closed.

এবার লিখে দিতে হবে কেন $\mathbb{R}$ open এবং কেনই বা closed. আমরা জানি যে একটা set open মানে তার যেকোনো বিন্দুকে ঘিরেই কিছুটা ফাঁকা জায়গা set-টার মধ্যেই আছে। তা $\mathbb{R}$ তো পুরোটাই দিগন্তবিস্তৃত ফাঁকা মাঠ। সুতরাং যেকোনো $x \in \mathbb{R}$ নিলে $(x-1, x+1)$ পুরোটাই $\mathbb{R}$-এর মধ্যে আছে।

> Open because $\forall x \in \mathbb{R}\ N(x,1) \subseteq \mathbb{R}$.

এবার লিখতে হবে $\mathbb{R}$ closed কেন।

> Closed because its complement is ϕ which is open.

এবার বাকী অংশ--

> $(0,1]$ is a set that is neither open nor closed.

কেন?

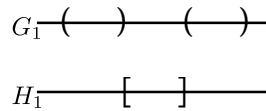
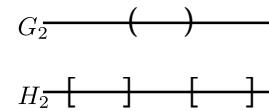
> Not open, $\because 1 \in (0,1]$ but
>
> $$\nexists \delta > 0 \quad N(1,\delta) \subseteq (0,1].$$
>
> Not closed, $\because (0,1]^c = (-\infty,0] \cup (1,\infty)$ is not open, as $0 \in (-\infty,0] \cup (1,\infty)$ but
>
> $$\nexists \delta > 0 \quad N(0,\delta) \subseteq (-\infty,0] \cup (1,\infty).$$

■

Example 23: Prove that every finite subset of $\mathbb{R}$ is a closed set.[2] **(1997)**

SOLUTION: প্রথমে সমস্যাটাকে অংকের ভাষায় প্রকাশ করি। সবকিছুর একটা করে নাম দিয়ে নিলে সুবিধা হয়। ধর finite set-টার নাম দিলাম A আর তাতে মোট element-এর সংখ্যা ধরলাম n. আর element-গুলোকে নাম দিলাম $a_1, ..., a_n$.

> Let $A = \{a_1, ..., a_n\}$ be any finite subset of $\mathbb{R}$, where $a_1 < \cdots < a_n$, say.
> We want to show that A is closed in $\mathbb{R}$,

আমাদের দেখাতে হবে A একটা closed set. কোনো set-কে closed দেখানোর মানে তার complement-টাকে open দেখানো।

i.e., A^c is open in $\mathbb{R}$,

Now,

$$A^c = (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup \cdots (a_{n-1}, a_n) \cup (a_n, \infty),$$

which is an union of open intervals, and hence open.

■

Example 24: Give illustrations of two non-empty open sets G_1, G_2 and two nonempty closed sets H_1, H_2 in $\mathbb{R}$ where $G_i \neq \phi, H_i \neq \phi$ and $G_i \cap H_i = \phi, i = 1, 2$ such that that $G_1 \cup H_1$ is an open set and $G_2 \cup H_2$ is a closed set in $\mathbb{R}$ (ϕ denoting null set).[3] **(2005)**

SOLUTION:

এই অংকটার ইংরাজিটা একটু খটমট। আসলে এখানে দুটো অংক আছে। প্রথমটাতে তোমাকে একটা open set G_1 আর একটা closed set H_1 বার করতে হবে (দুজনেই nonempty) যাতে $G_1 \cap H_1 = \phi$ আর $G_1 \cup H_1$ একটা open set হয়। এর উত্তরটা ছবি দিয়ে ভাবা সহজ। Fig 24 দ্যাখো। এখানে G_1-এর দুটো অংশ, যাদের মধ্যে H_1-টা ঠিক খাপে খাপে ঢুকে যায়।

We may take $G_1 = (0, 1) \cup (2, 3)$ and $H_1 = [1, 2]$.

Then $G_1 \cap H_1 = \phi$ and $G_1 \cup H_1 = (0, 3)$, which is open.

পরের অংকটায় একইভাবে G_2, H_2 বার করতে হবে যাতে $G_2 \cup H_2$ হয় closed. Fig 25 দ্যাখো। এবার H_2-র দুটো অংশ, যাদের মাঝখানে G_2 খাপে খাপে এঁটে যায়।

We may take $G_2 = (1, 2)$ and $H_2 = [0, 1] \cup [2, 3]$.

Then $G_2 \cap H_2 = \phi$ and $G_2 \cup H_2 = [0, 3]$, which is closed.

■

2.2.1 Union/intersection

আমরা জানি যে de Morgan লাগিয়ে union-কে intersection-এ, এবং intersection-কে union-এ পরিণত করা যায়। যেমন $A_1, A_2, ...$ ইত্যাদি কিছু set হলে

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots$$

এবং

$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots$$

হয়। এদিকে open এবং closed set-রা আবার পরস্পরের complement. সুতরাং বুঝতেই পারছ যে open set-দের union নিয়ে যা বলা যায়, তা থেকে closed set-দের intersection নিয়েও একইরকম কিছু বলা যাবে। নীচের অংকে সেই কাজটাই করতে হবে। আমরা দেখেছি যে finite-সংখ্যক open set-এর intersection হয় open. এ থেকে de Morgan লাগিয়ে সিদ্ধান্ত করব যে finite-সংখ্যক closed set-এর union হবে closed.

Example 25: Prove that the union of a finite number of closed sets is closed. Justify for infinitely many closed sets.[3+1] **(2002,2007)**

SOLUTION:

First part:

Let $A_1, ..., A_n \subseteq \mathbb{R}$ be closed.
To show: $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ is closed,
i.e, A^c is open,
i.e., by de Morgan's law, $A = A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c$ is open.
Let $U_i = A_i^c$ and $U = A^c$.
Given: U_i's are open.
To show: U is open, *i.e.*,

$\forall a \in U \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(a, \epsilon) \subseteq U.$

এইবার এই অংকটা ঠিক (??) নম্বর অংকটাতে পরিণত হয়েছে। সুতরাং ওটার সমাধানটা করে গেলেই হবে--

If $U = \phi$, then done, $\because \phi$ is open.
$\boxed{\forall a}$ Otherwise take any $a \in U$.
$\because a \in U, \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \quad a \in U_i$.
But since each U_i is open,

$$\therefore \exists \epsilon_i > 0 N(a, \epsilon_i) \subseteq U_i.$$

$\boxed{\exists \epsilon}$ Choose $\epsilon = \min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\} > 0$.

Take any $i \in \{1, ..., n\}$. Then

$$N(a, \epsilon) \subseteq N(a, \epsilon_i) \subseteq U_i.$$

So

$$N(a, \epsilon) \subseteq U,$$

as required.

অংকটার দ্বিতীয় অংশে কাজ করতে হবে infinite-সংখ্যক closed set-এর union নিয়ে। Open set-এর বেলায় দেখেছিলাম যে infinite-সংখ্যক open set-এর intersection নিলে open নাও থাকতে পারে। সুতরাং de Morgan-এর কল্যাণে আন্দাজ করতেই পারছ যে infinite-সংখ্যক closed set-এর union নিলে নতুন set-টা closed নাও হতে পারে।

Second part: Union of infinitely many closed sets may or may not be closed.

দুরকম উদাহরণ দিই--এক, যেখানে union-টা closed নয়, আর দুই, যেখানে closed. দুইক্ষেত্রেই আমরা কাজ করব singleton set-দের নিয়ে, যারা অবশ্যই closed in $\mathbb{R}$.

> For example, for each $x \in \mathbb{R}$ let $A_x = \{x\}$.
> Then each A_x is closed.

যদি $(0,1)$-এর মধ্যে যত x আছে তাদের সবার জন্য A_x-গুলোর union নিই, তবে অবশ্যই পুরো $(0,1)$-ই পাব, যেটা মোটেই closed in $\mathbb{R}$ নয়।

> But
> $$\bigcup_{x\in(0,1)} A_x = (0,1),$$
> which is not closed in $\mathbb{R}$.

অন্য উদাহরণটাও একইরকম--

> However,
> $$\bigcup_{x\in[0,1]} A_x = [0,1],$$
> which is closed in $\mathbb{R}$.

■

একই রকম আরেকটা de Morgan-এর অংক। এটা নিজে চেষ্টা কর।

Example 26: Prove that the intersection of two closed sets is a closed set. Hence show that if $G \subset \mathbb{R}$ is an open set and $F \subset \mathbb{R}$ is a closed set, then $F - G$ is a closed set.[3+2] **(2012.2a)**

SOLUTION:

> Second part: $F - G = F \cap G^c$.
> Now F is closed. Also G^c is closed, since G is open.
> Since intersection of two closed set is closed, hence $F - G$ is closed, as required.

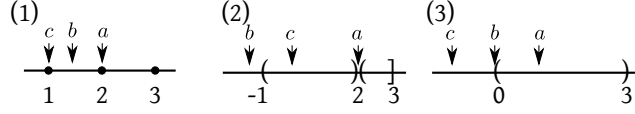
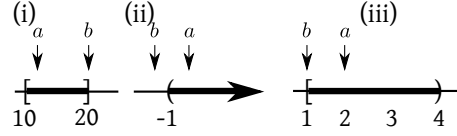
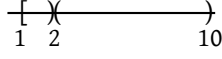
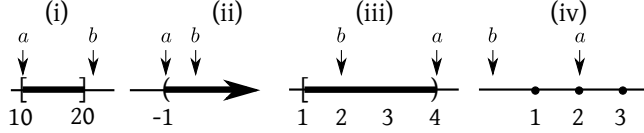
■

Exercise 11: Prove that the intersection of any collection of closed sets is closed. ■

Example 27: Show that the intersection of a finite collection of closed sets is closed. Give an example to show that arbitrary intersection of closed sets may not be a closed set.[2+1] **(2010.3b)**

SOLUTION: প্রথম অংশে finite কথাটার দরকার নেই। দ্বিতীয় অংশটা ডাহা ভুল! ■

Answers

1. **(1)** Boundary points: a, c; b কোনোটাই নয়। **(2)** Boundary point: a; Interior point: c; b কোনোটাই নয়। **(3)** Boundary points: b; Interior point: a; c কোনোটাই নয়।

2. **3.** তিনটে, $1, 2, 10$

4. না, কোনো set-এর ক্ষেত্রেই সম্ভব নয়! **5.**

6.

7. Boundary pointএর সংজ্ঞায় A-র জায়গায় A^c বসিয়ে দাও, দেখবে তাতে সংজ্ঞাটা একই থাকছে। **8.** ϕ. **9.** হ্যাঁ। **10.** $[0, 2)$. **11.** আগে আমরা শিখেছিলাম যে open set-দের union সর্বদা open হয়। তার উপরে de Morgan লাগাও।

Chapter IV
Limit points

DAY 1
Limit points, isolated points

এবার limit point বলে একটা নতুন জিনিস শিখব। এই ব্যাপারটা এতক্ষণ যা যা শিখেছি তার চেয়ে একটু জটিল। সুতরাং আমরা ধাপে ধাপে এগোব। আমাদের মূল লক্ষ্য আগেরই মত, প্রথমে ছবি দেখে চিনতে শিখব কাকে limit point বলে, তারপর অংকের ভাষায় তার definition লিখব। অবশেষে ছবি দেখে যে সব জিনিস সহজেই বোঝা যায়, সেগুলোকে এই definition দিয়ে প্রমাণ করব।
$S=[0,1)\cup\{2\}$ set-টা নাও (Fig 1).। এতে পাঁচটা point $0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}$ আর 2 দেখানো আছে। এর মধ্যে $0,\frac{1}{2},2\in S$, আর বাকীরা S-এর বাইরে। এখন S হল একটা infinite set. মনে কর S-এর প্রতিটা point-এ যেন একটা করে মানুষ দাঁড়িয়ে আছে। তার মানে $[0,1)$-এ প্রচুর মানুষ গাদাগাদি করে দাঁড়িয়ে আছে, আর একটা মানুষ একটু তফাতে 2-তে দাঁড়িয়ে রয়েছে। এবার দ্যাখো $0,\frac{1}{2}$ আর 1 এই তিনটে point রয়েছে ভীড়ের মধ্যে। 0 আর 1 ঠিক ভীড়ের একেবারে মধ্যে নেই, কিন্তু ভীড়ের সঙ্গে একেবারে গা ঘেঁসে রয়েছে। কিন্তু $\frac{3}{2}$ আর 2 এই দুটো point রয়েছে ভীড় থেকে খানিকটা দূরে। যে সব point ভীড়ের মধ্যে বা ভীড়ের একেবারে গা ঘেঁসে থাকে তাদের বলে limit point. লক্ষ কর যে একটা set-এর limit point যে set-টার ভিতরেই থাকবে এমন কোনো কথা নেই, ভিতরেও থাকতে পারে, বাইরেও থাকতে পারে। যেমন $\frac{1}{2},1$ দুজনেই S-এর limit point, কিন্তু $\frac{1}{2}\in S$ আর $1\not\in S$. একটা set-এর যেসব সংখ্যা limit point নয়, অর্থাৎ যারা বাকীদের থেকে একটু দূরে দাঁড়িয়ে আছে, তাদের বলে isolated point. মনে রেখো যে isolated point-রা কিন্তু সবসময়েই set-এর মধ্যে থাকে। Fig 1-এ 2 হল একটা isolated point, কিন্তু $\frac{3}{2}$ নয়।
ভীড়ের গা ঘেঁসে থাকার আরেকটা উদাহরণ দ্যাখো। এবার set-টা নেব

$$T=\{\tfrac{1}{n}\ :\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Fig 2 লক্ষ কর। এই set-এর point-গুলো দেখলে মনে হয় যেন টিকিট কাউন্টারের সামনে লম্বা লাইনে লোকেরা দাঁড়িয়ে আছে, কাউন্টারটা হল 0-তে, তাই লাইনটা যতই 0-র কাছে এগোচ্ছে ততই গাদাগাদি বাড়ছে। এখানে 0 হল একমাত্র limit point. সিনেমার টিকিটের লাইনটা দু দিক থেকেও হতে পারত, যেমন যদি set-টা নিতাম

$$W=\{\tfrac{1}{n}\ :\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{-\tfrac{1}{n}\ :\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Fig 3 দ্যাখো। এখানেও একমাত্র limit point হল 0.
এই তিন ধরণের limit point-এর ছবি মাথায় খুব ভালো করে রাখবে--

1. একটা interval-এর ভিতরের কোনো point, যেমন $(0,1]$-এর একটা limit point হল $\frac{1}{3}$.
2. একটা interval-এর প্রান্তের কোনো point, যেমন $(0,1]$-এর বেলায় $0,1$ দুজনেই হল limit point.
3. সিনেমার লাইনের মত অনেকগুলো point থাকলে যেখানে যেখানে গাদাগাদি, সেই সব point-গুলো।

Exercise 1: Fig 4-এ চারটে set দেখানো আছে। ছবি <u>দেখে</u> বল এদের limit point কি কি। ■

Exercise 2: ছবি <u>এঁকে</u> limit point বার কর--
(1) $\{1,2,3\}$ **(2)** $(-1,2)\cup(3,4]$ **(3)** $\mathbb{N}$ **(4)** $\mathbb{Z}$ **(5)** $\left\{(-1)^n+\frac{1}{m}\ :\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$.
■

এইবার অংকের ভাষায় limit point-এর definition-টা লিখে ফেলার চেষ্টা করা যাক। ভীড়ের মধ্যে বা ভীড়ের একেবারে গা ঘেঁসে দাঁড়াবার অভিজ্ঞতা আমাদের সকলেরই আছে। এই অবস্থায় একটুও হাত-পা নাড়াতে গেলেই অন্য লোকের গায় গিয়ে পড়তে হয়। এই কথাটাকে অংকের ভাষায় লিখতে গেলে--

$\forall\delta>0$ যদি কোনোদিকে δ পরিমাণ সরতে যাই তবে অন্য লোকের গায় পড়ব।

ধর আমি দাঁড়িয়ে আছি a বিন্দুতে। যদি δ পরিমাণ সরতে চাই তবে আমি $N(a,\delta)$-র মধ্যে নড়ে চড়ে বেড়াতে চাইছি। এবং সেটা করতে গেলে আমি অন্য লোকের গায় পড়ব। যদি S হয় যাবতীয় লোকের set তবে <u>অন্য</u> লোকের গায় গিয়ে পড়া মানে $N(a,\delta)\cap S$-এর মধ্যে a ছাড়াও অন্ততঃ <u>আরও একটা</u> কোনো point আছে। এই কথাটা সংক্ষেপে লিখব deleted neighbourhood $N'(a,\delta)$ ব্যবহার করে (Fig 5).
তাহলে অন্যলোকের গায় গিয়ে পড়ার ব্যাপারটাকে লিখতে পারি

$$N'(a,\delta)\cap S\neq\phi.$$

সব মিলিয়ে তাহলে limit point-এর সংজ্ঞাটা কি দাঁড়ালো সেটা নীচের প্রশ্নের উত্তরে লিখি।

Example 1: Define limit point of a subset S of real numbers.[1] **(2001)**

SOLUTION:

> DEFINITION: **Limit point of a set**
>
> Let $S\subseteq\mathbb{R}$ and $a\in\mathbb{R}$. We say that a is a <u>limit point</u> of S if
>
> $$\forall\delta>0\quad N'(a,\delta)\cap S\neq\phi.$$

■

Limit point-এর আরেক নাম হল accumulation point. কেউ কেউ আবার একে cluster point বলতে ভালোবাসেন।

Example 2: Show that 0 is a limit point of $[-1,2)$.

SOLUTION:

To show that 0 is a limit point of $[-1,2)$, *i.e.*,

$\forall\epsilon>0\quad N'(0,\epsilon)\cap[-1,2)\neq\phi.$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon>0$.

To show $N'(0,\epsilon)\cap S\neq\phi$, *i.e.*,

$\exists y \in N'(0,\epsilon) \cap S$.

এবার Fig 6 দেখে আমাদের ইচ্ছে $y = -\frac{\epsilon}{2}$ নেওয়ার, কিন্তু সমস্যা হল ϵ বেশী বড় হয়ে গেলে আবার $-\frac{\epsilon}{2}$-টা -1-এর বাঁদিকে গিয়ে পড়তে পারে, যেমন Fig 7-এ হয়েছে। তাই আমরা y নেব এইভাবে--

 Choose $y = \max\{-1, -\frac{\epsilon}{2}\}$.

 Then $y \in N'(0,\epsilon)$ and $y \in N'[-1,2)$.
So $N'(0,\epsilon) \cap [-1,2) \neq \phi$, as required.

■

Exercise 3: Show that 0 is a limit point of $(-1,2)$. ■

আমরা আগেই বলেছি যে একটা set-এর যে সব সংখ্যা limit point নয় (অর্থাৎ যারা ভীড়ের থেকে একটু দূরে আছে) তাদের বলে isolated point. তার মানে--

DEFINITION: Isolated point

Let $S \subseteq \mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{R}$. We say that a is an isolated point of S if $a \in S$ but a is not a limit point of S.

Example 3: Show that 2 is an isolated point of $\{1, 2, 2.5, 3\}$.

SOLUTION:

To show 2 is an isolated point of $\{1, 2, 2.5, 3\}$,

তার মানে দেখাতে হবে যে $2 \in \{1, 2, 2.5, 3\}$ (যেটা বলাই বাহুল্য!), কিন্তু 2 এই set-টার limit point নয়।

i.e., $2 \in \{1, 2, 2.5, 3\}$, which is obvious, and 2 is a not a limit point of $\{1, 2, 2.5, 3\}$, *i.e.*,

 $\exists \epsilon > 0 \quad N'(2,\epsilon) \cap \{1, 2, 2.5, 3\} = \phi$.

এইটা পেলাম limit point-এর সংজ্ঞার negation নিয়ে। Fig 8 থেকে দেখতে পাচ্ছি যে 2 সংখ্যাটা বাকীদের থেকে একটু তফাতে আছে, আমরা ϵ-টা নেব এমনভাবে যাতে সেটা 2-এর নিকটতম প্রতিবেশীর দূরত্বের সমান বা তার চেয়ে কম হয়। এখানে 2-এর বাঁদিকের প্রতিবেশী হল 1, (দূরত্ব $= 2 - 1 = 1$) আর ডানদিকের প্রতিবেশী হল 2.5 (দূরত্ব $2.5 - 2 = \frac{1}{2}$). তার মানের নিকটতম প্রতিবেশী হল 2.5, যার দূরত্ব $\frac{1}{2}$. তাই আমরা $\epsilon = \frac{1}{2}$ নিতে পারি।

Choose $\epsilon = \frac{1}{2}$.

 Then $N'(2,\epsilon) = (\frac{3}{2}, 2) \cup (2, \frac{5}{2})$.
So $N'(2,\epsilon) \cap \{1, 2, 2.5\} = \phi$, as required.

■

Exercise 4: দ্যাখাও যে নীচের প্রতিটি ক্ষেত্রেই a সংখ্যাটা S-এর একটা limit point, কিন্তু b সংখ্যাটা নয়। ছবি এঁকে নিতে ভুলো না যেন!

1. $S = [1,2] \cup \{3\}, \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = 3.$
2. $S = (-1, \infty), \quad a = -1, \quad b = -2.$
3. $S = (0,1) \cup \mathbb{N}, \quad a = 1, \quad b = 2.$

■

অনেক ছাত্রকেই দেখেছি যারা limit point আর boundary point গুলিয়ে ফেলে। যেমন, যদি বলি $(0,1)$-এর তিনটে limit point দিতে, তবে দুটো limit point চটপট বলতে পারবে--0 আর 1. তারপর খানিকক্ষণ মাথা চুলকে আমতা আমতা করে বলবে-- মাঝের point-গুলোও বোধহয় limit point. মাঝের point-গুলোও যে limit point সে বিষয়ে সন্দেহ নেই, কিন্তু এই গুলিয়ে যাওয়ার পিছনে একটা কারণ হল এই যে, limit point আর boundary point-এর মধ্যে সত্যই অনেক মিল আছে। আমরা boundary point-এর সংজ্ঞা শিখেছিলাম তৃতীয় অধ্যায়ে, একবার চট্ করে মনে করিয়ে দিই--boundary point-রা আছে set-এর একেবারে কিনারায়, একটু এপাশ ওপাশ করলেই set-এর মধ্যেও ঢুকে যেতে পারো বা বাইরেও চলে যেতে পারো। তাই $a \in \mathbb{R}$-কে তখনই $S \subseteq \mathbb{R}$-এর একটা boundary point বলব যখন

$$\forall \delta > 0 \quad N(a,\delta) \cap S \neq \phi \text{ এবং } N(a, delta) \cap S^c \neq \phi.$$

এবার limit point আর boundary point-এর মধ্যে তুলনা করা যাক। প্রথমতঃ এই দুই ধরণের point-ই set-এর ভিতরেও থাকতে পারে বাইরেও থাকতে পারে। যেসব boundary point আছে set-এর বাইরে তারা কিন্তু সব সময়ে limit point-ও হয়, এবং set-এর বাইরে যে সব limit point আছে তারা boundary point হতেও বাধ্য!

Exercise 5: Let $A \subseteq \mathbb{R}$ and $\ell \notin A$. Prove that ℓ is a limit point of A if and only if it is a boundary point of A. ■

অবশ্য set-এর ভিতরের point-গুলোর ক্ষেত্রে এরকম কিছু বলা যায় না।

Exercise 6: Give an example of a boundary point that is not a limit point, and a limit point that is not a boundary point. ■

Exercise 7: Let $A \subseteq \mathbb{R}$ and $a \in A$. Show that a is a limit point of A^c if and only if a is a boundary point of A. ■

Exercise 8: Let $A \subseteq \mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{R}$. Show that a is either a limit point of A or a limit point of A^c (or both). ■

Interior point-দের সাথেও limit point-দের একটা সম্পর্ক আছে, তবে সেটা এক তরফা--

Exercise 9: Prove that any interior point must be a limit point. Also give an example of a limit point that is not an interior point. ■

এইবার আবার ভীড়ের উপমায় ফিরে আসি। ভীড়ের মধ্যে বা গায় লেগে থাকা point-গুলো হল limit point. সেই কথাটাকে আমরা অংকের ভাষায় লিখেছিলাম এই বলে যে, limit point-কে ঘিরে যাই deleted neighbourhood নিই, তাতে set-টার অন্ততঃ একটা point থাকবে। কিন্তু ভীড়ের অভিজ্ঞতা থেকে আমরা জানি যে খালি একটা নয়, আসলে প্রচুর প্রচুর point-ই থাকবে neighbourhood-টায়। "প্রচুর প্রচুর" মানে কি? উত্তর হল infinitely many! এইটাই নীচের অংকে দেখাতে বলেছে। এই অংকটা বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ কারণ এটা ব্যবহার করে অনেক সময়ে সহজে দেখানো যায় যে, কোনো একটা সংখ্যা কোনো একটা set-এর limit point নয়। সেই প্রসঙ্গে এক্ষুণি আসছি।

Example 4: Prove that every neighbourhood of a limit point ξ of a set S in $\mathbb{R}$ contains an infinite number of points of S.[2] **(2008)**

HINT:

প্রথমে লিখে নিই কি দেওয়া আছে আর কি দেখাতে হবে।

Given: ξ is a limit point of $S \subseteq \mathbb{R}$.

To show:

$\forall \epsilon > 0 \quad N(\xi, \epsilon)$ has infinitely many points of S.

Limit point-এর definition-টা লিখে নিই, কারণ এটা বার বার কাজে লাগবে।

By definition of limit point

$$\forall \epsilon > 0 \quad N'(\xi, \epsilon) \cap S \neq \phi.$$

Definition বলছে যে ξ-কে ঘিরে যেকোনো deleted neighbourhood-এই S-এর অন্ততঃ একটা element পাওয়া যাবে। আমাদের কাজ এই definition-টাকে বার বার লাগিয়ে infinitely many element বার করা।

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

Fig 9(a) দ্যাখো।

Then we get some $x_1 \in N'(\xi, \epsilon) \cap S$.

এই একটা element পাওয়া গেল। এবার আমরা দেখব ξ-এর আরো কাছে আরেকটা element পাওয়া যায় কিনা। Fig 9(b) দ্যাখো।

Since $x_1 \in N'(\xi, \epsilon)$, so $x_1 \neq \xi$, or $|x_1 - \xi| > 0$.

Hence taking $\epsilon_1 = |x_1 - \xi| > 0$, we get $x_2 \in N'(\xi, \epsilon_1) \cap S$.

Clearly, $|x_1 - \xi| > |x_2 - \xi|$.

আবার একই ভাবে একটা x_3 পাবো যেটা ξ-এর আরো কাছে (Fig 9(c))।

> Continuing in this way we get an infinite sequence $x_1, x_2, x_3, ...$ of distinct elements of S such that
> $$\epsilon > |x_1 - \xi| > |x_2 - \xi| > \cdots .$$

সুতরাং এইভাবে চলতে আমরা infinitely many element পেয়ে যাচ্ছি, ঠিক যেমনটা দরকার ছিল।

> Thus the infinitely many points x_n's of S are all inside $N(\xi, \epsilon)$.

এবার একটা উপসংহার--

> Since $\epsilon > 0$ was arbitrary, this proves the result.

■

এই যে অংকটা থেকে একটা জিনিস শিখলাম। যদি একটা set $A \subseteq \mathbb{R}$ আর একটা $a \in \mathbb{R}$ দিয়ে দেখাতে বলে যে a সংখ্যাটা A-র limit point নয়, তবে সরাসরি সংজ্ঞা থেকে দেখাতে হলে এমন একটা $\epsilon > 0$ খুঁজতাম যাতে $N'(a, \epsilon)$-এর মধ্যে A-র কোনো pointনা থাকে। কিন্তু এই অংকটার দৌলতে কাজটা অনেক সহজ হয়ে গেল, খালি এমন $\epsilon > 0$ পেলেই চলবে যাতে $N(a, \epsilon)$-র মধ্যে A-র খালি finiteসংখ্যক pointথাকে, অর্থাৎ দু-একটা point ঢুকে গেলেও আপত্তি নেই, খালি যেন infinitely many point ঢুকে না যায়, সেটুকু লক্ষ রাখলেই হবে। এই কায়দাটা আমরা এবার কাজে লাগাব।

1.1 Derived set

এই প্রসঙ্গে আরেকটা সংজ্ঞাও বলে রাখি, একটা set-এর সব limit point একসঙ্গে নিয়ে যে set পাওয়া যায়, তাকে বলে মূল set-টার derived set. যেমন যদি $S = (0, 1) \cup \{2\}$ নিই, তবে আমরা জানি যে 0 থেকে 1 অবধি সব সংখ্যাই এর limit point, কিন্তু 2 এর limit point নয় (যেহেতু একটু দূরে আছে)। তাই S-এর derived set হবে $[0, 1]$. বোঝার জন্য Fig 10 দ্যাখো।

Example 5: Define the derived set of a subset S of $\mathbb{R}$. **(2005,2009)**

SOLUTION:

DEFINITION: **Derived set**

> The derived set S' of a set $S \subseteq \mathbb{R}$ is defined as the set of all limit points of S.

■

এবার আমরা কয়েকটা অংক করব যেখানে এই কথাটা বার বার লাগবে যে n যত বড় হবে $(n \to \infty)$ ততই $\frac{1}{n}$ চলে যাবে 0-র কাছাকাছি। এমনটা যে হয় সেটা আমরা সবাই জানি, যেমন যদি একটা কেক n জনের মধ্যে সমান ভাগ করে দেওয়া হয়, তবে প্রত্যেকের ভাগে পড়বে $\frac{1}{n}$, আর যতই ভাগীদারের সংখ্যা বাড়বে $(n \to \infty)$ ততই প্রত্যেকের ভাগের আরো আরো কম পড়বে। এই ব্যাপারটাকে অংক কষে প্রমাণ করা যায় $\mathbb{R}$-এর একটা বৈশিষ্ট্য কাজে লাগিয়ে তাকে বলে "Archimedean

property." (আমরা সেটা শিখব পঞ্চম অধ্যায়ে)। নীচের অংকগুলোতে যখনই $\frac{1}{n} \to 0$ লেখার দরকার হবে, আমরা তাই লিখব "by Archimedean property."
নীচের কয়েকটা অংক একইরকম, সুতরাং প্রথমটা ভালো করে বুঝলেই পরেরগুলোও বুঝতে পারবে।

Example 6: Find the derived set of

$$S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

[3] **(2010,2008)**
HINT:
প্রথমে একটা ছবি এঁকে দেখে নিই যে S-টা দেখতে কেমন (Fig 11)। দেখাই যাচ্ছে যে বিন্দুগুলো 0-র কাছে একটা ভীড় জমাচ্ছে। আর কোথাও কোনো ভীড় নেই। সুতরাং 0-ই একমাত্র limit point হবে।

The derived set of S is $S' = \{0\}$.

এইবার এইকথাটা অংক দিয়ে লিখতে হবে। এখানে আমাদের দুটো কাজ-- প্রথমে বলা কেন 0 একটা limit point, এবং তার পরে বলা অন্য কোনো সংখ্যা কেন limit point নয়।
এখানে 0 হল limit point কারণ 0-কে ঘিরে যাই deleted neighbourhood নিই না কেন, এক সময়ে $\frac{1}{n}$-গুলো ছোটো হতে হতে ঠিক তার মধ্যে ঢুকে পড়বে। তার মানে সেই Archimedean property-র ব্যাপারটা আসছে--

0 is a limit point because, by the Archimedean property of $\mathbb{R}$,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n} \in N'(0, \epsilon).$$

Fig 12 দ্যাখো।
এবার দেখাবো যে অন্য কোনো সংখ্যা limit point নয়।

Shall show if $a \neq 0$, then a is not a limit point,

এখানে সেই কায়দাটা লাগাব--

i.e.,

$\forall a \neq 0 \exists \epsilon > 0 \quad N(a, \epsilon) \cap S$ is a finite set.

Take any $a \neq 0$.

আমরা দেখাতে চাই যে a সংখ্যাটা ভীড়ের থেকে দূরে আছে। ছবি থেকে দেখে নিয়েছি যে ভীড়টা রয়েছে 0-তে। তাই প্রথমে 0 আর a-র মাঝবরাবর একটা দেওয়াল তুলি (Fig 13-এ ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইন)। তার পর দেখাই যে ভীড়টা আছে এই দেওয়ালের বাঁদিকে। এই কাজে আবার Archimedean property লাগবে। তাহলে a থেকে এই দেওয়ালের দূরত্বটাকে ϵ হিসেবে নিলেই চলবে।

Choose $\epsilon = \frac{|a-0|}{2} > 0$.

Then by Archimedean property

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{N} < \epsilon.$$

So

$$\forall n \geq N \quad \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Hence

$$\forall n \geq N \quad \frac{1}{n} \notin N(a, \epsilon),$$

so $N(a, \epsilon) \cap S$ is finite, as required.

■

1.2 A-র সঙ্গে A'-এর সম্পর্ক

কোনো একটা set দিয়ে তার derived set বার করতে হলে set-টার একটা ছবি এঁকে নিতে পারলে খুব সুবিধা। ছবি থেকে দেখে নেওয়া যায় কোথায় কোথায় ভীড় হচ্ছে। তা থেকেই বোঝা যায় limit point-গুলো কি কি। সমস্যা হল লিখে প্রমাণ করা। Limit point-গুলোকে limit point দ্যাখানো কঠিন হয় না। কিন্তু আর কেউ যে limit point নয় সেটা দেখাতেই মুস্কিল হয়। আগের অংকের সমাধানটা দেখলেই বুঝবে যে 0-কে limit point দেখাতে এক লাইন লেগেছিল, কিন্তু প্রমাণটা লম্বা হয়েছিল এটা দেখাতে গিয়ে যে কোনো nonzero সংখ্যা limit point হতে পারে না। Set-টা আরও জটিল হলে প্রমাণটাও আরও লম্বা হয়ে যেত। তখন আমরা আর সরাসরি না করে ঘুরপথে এগোই। এর জন্য আমরা প্রথমে এই প্রশ্নটার উত্তর খুঁজি-- একটা set A-কে কোনোভাবে পাল্টালে A'-টা কিভাবে পাল্টাবে? যেমন, যদি A-র বদলে তার একটা subset নিই, তবে কি নতুন A'-টাও আগের A'-এর একটা subset হবে? কিংবা যদি A-র সবগুলো সংখ্যাকে 2 দিয়ে গুণ করি, তবে A'-এর সংখ্যাগুলোও কি দ্বিগুণ হয়ে যাবে? এই ধরণের প্রশ্নের উত্তর জানাটা জরুরী, কারণ তাহলে একটা setএর derived set জানলেই, তার কাছাকাছি অন্যান্য set-এর derived set বার করে ফেলার কাজে সুবিধা হবে। এর জন্য নীচের কয়েকটা theorem এবং অংক খুব কাজে দেবে।

THEOREM

If $A \subseteq B$ are any two subsets of $\mathbb{R}$, then $A' \subseteq B'$.

এটা প্রমাণ করা খুবই সহজ। ধরো কিছু একটা $a \in A'$ নিলাম। (যদি $A' = \phi$ হয়, তবে তো কোনো ল্যাঠাই নেই, কারণ ϕ সবারই subset!) তার মানে যাই $\epsilon > 0$ দাও $N'(a, \epsilon)$ গিয়ে A-র গায় পড়বে--

$$\forall \epsilon > 0 \quad N'(a, \epsilon) \cap A \neq \phi.$$

এদিকে A তো B-এর subset, সুতরাং A-র গায় গিয়ে পড়া মানে B-এরও গায় গিয়ে পড়া--

$$\forall \epsilon > 0 \quad N'(a, \epsilon) \cap B \neq \phi.$$

অতএব $a \in B'$-ও হতে বাধ্য। যেহেতু এই যুক্তিটা যেকোনো $a \in A'$-এর জন্যই খাটে, তাই $A' \subseteq B'$ হচ্ছে।

THEOREM

If A, B are any two subsets of $\mathbb{R}$ that differ by only finitely many elements, then $A' = B'$.

এইটাও প্রমাণ করা সহজ। $A' = B'$ দেখানোর দুটো ধাপ--প্রথমে $A' \subseteq B'$ দেখানো, এবং তারপরে $B' \subseteq A'$ দেখানো। এক দিকটা হলে অন্যদিকটাও একইভাবে হবে (A, B-র স্থান বিনিময় করে দিলেই চলবে)। সুতরাং খালি $A' \subseteq B'$ অংশটা কি করে করতে হবে বলি। যদি $A' = \phi$ তবে তো ঝামেলা মিটেই গেল। নইলে যা খুশি একটা $a \in A'$ নাও। তবে

$$\forall \epsilon > 0 \quad N'(a, \epsilon) \cap A \text{ is an infinite set.}$$

এদিকে A আর B-এর তফাৎ তো খালি finite-সংখ্যক
element-এ। তাই $N'(a, \epsilon) \cap A$ এবং $N'(a, \epsilon) \cap B$-এর মধ্যে পার্থক্যও কেবল finite-সংখ্যক element-ই। একটা infinite set-এর finite-সংখ্যক element এদিক ওদিক করলেও তো একটা infinite set-ই থাকে। সুতরাং

$$\forall \epsilon > 0 \quad N'(a, \epsilon) \cap B \text{ is an infinite set.}$$

অতএব $a \in B'$ হচ্ছে। সুতরাং $A' \subseteq B'$ হল। একইভাবে $B' \subseteq A'$-ও হবে। সুতরাং পেয়ে গেলাম $A' = B'$, যেমনটা দরকার ছিল।
এবার আরেক ধরণের theorem দেখি। ধর $A \subseteq \mathbb{R}$ কোনো একটা set, আর $a, b \in \mathbb{R}$ দুটো সংখ্যা। যদি A-র প্রতিটি element-কে a দিয়ে গুণ করে b যোগ করি, তবে যে নতুন set-টা পাব তাকে বলব $aA + b$, অর্থাৎ

$$aA + b = \{ax + b \ : \ x \in A\}.$$

এবার নীচের theorem-টা প্রমাণ কর দেখি।

THEOREM

For any $A \subseteq \mathbb{R}$ and any $a, b \in \mathbb{R}$ with $a \neq 0$

$$(aA + b)' = aA' + b.$$

প্রমাণটা খুবই সহজ এবং ছোট্টো। খালি একটা জিনিস বলে দিই--যদি $x \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ এবং $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ হয় তবে

$$aN(x, \epsilon) + b = N(ax + b, |a|\epsilon)$$

হবে। যেমন $-2N(10, 0.01) + 3 = N(-17, 0.02)$. বুঝতে পারছ তো কেন $a \neq 0$ লেগেছে?
এবার একগুচ্ছ অংক দেখব যেখানে আমরা একাধিক set-কে মিলিয়ে জুলিয়ে নতুন set বানাবো (যেমন union বা intersection নিয়ে)। আমাদের আগ্রহ থাকবে এইটা বুঝতে যে এর ফলে derived set-গুলো কিভাবে আচরণ করে (যেমন union-এর derived set কি সব সময়েই derived set-দের union হয়?)।

Example 7: For any two subsets S and T of $\mathbb{R}$ show that $(S \cup T)' = S' \cup T'$.[3] **(2005)**

SOLUTION:

> To Show: $(S \cup T)' = S' \cup T'$,

এখানে আমাদের দুটো set-কে সমান দেখাতে হবে। দুটো set-কে সমান দেখানোর কায়দা হচ্ছে এইটা দেখানো যে এই set-টার যাবতীয় point ওইটার মধ্যে আছে, আবার ওই set-টার যাবতীয় point এইটার মধ্যে আছে। এর ফলে প্রমাণটা দুইভাগে আলাদা করে করা যাবে। এরকম দুভাগে করাটাই দুটো set-কে সমান দেখানোর প্রচলিত পদ্ধতি।

<u>Proof that $(S \cup T)' \subseteq S' \cup T'$:</u>

To show

$\forall x \in (S \cup T)' \quad x \in S' \cup T'.$

গোড়ায় $\forall x \in (S \cup T)'$ আছে, অতএব--

$\boxed{\forall x}$ If $(S \cup T)' = \phi$, then vacuously true. Otherwise, take any $x \in (S \cup T)'$. Shall show $x \in S' \cup T'$.

আমরা এখানে proof by contradiction করব।

Let, if possible, $x \notin S' \cup T'$.

এবার Fig 14(a) দ্যাখো। আমরা x-কে S আর T-র থেকে খানিকটা দূরে দেখিয়েছি, কারণ x এখানে S' বা T'-তে নেই।

So $x \notin S'$ and $x \notin T'$.

Since $x \notin S'$,

$$\exists \epsilon_1 > 0 N'(x, \epsilon_1) \cap S = \phi.$$

Again, since $x \notin T'$,

$$\exists \epsilon_2 > 0 N'(x, \epsilon_2) \cap T = \phi.$$

এই জিনিসটা Fig 14(b)-তে দেখানো হয়েছে।

Take $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$. Then

$$N'(x, \epsilon) \cap (S \cup T) = \phi (\Rightarrow\Leftarrow).$$

This is not possible because x is a limit point of $S \cup T$.

ওই যে $(\Rightarrow\Leftarrow)$ চিহ্নটা দিয়েছি, ওটার মানে হল contradiction. যেকোনো proof by contradiction শেষ হয় ওটা দিয়ে। এবার প্রথম অর্ধেকের উপসংহার--

Thus

$$(S \cup T)' \subseteq S' \cup T', \qquad (*)$$

as required.

এবার বাকী অর্ধেক--

<u>Proof that $(S \cup T)' \supseteq S' \cup T'$:</u>

To show:

$\forall x \in S' \cup T' \quad x \in (S \cup T)'.$

If $S' \cup T' = \phi$, then vacuously true. Otherwise, take any $x \in S' \cup T'$.

Either $x \in S'$ or $x \in T'$ (or both).

প্রথমে দেখি $x \in S'$ হলে কি হয়। তার জন্য Fig 15 দ্যাখো। এবার আমরা x-কে S-এর গায় লাগিয়ে এঁকেছি।

> Case I: If $x \in S'$ then, by definition of derived set, $\forall \epsilon > 0$
>
> $$N'(x, \epsilon) \cap S \neq \phi.$$
>
> So
>
> $$N'(x, \epsilon) \cap (S \cup T) \neq \phi,$$
>
> *i.e.*, $x \in (S \cup T)'$, as required.

যদি $x \in T'$ হত, তাহলেও একই যুক্তি খাটত, খালি S-এর জায়গায় T বসিয়ে।

> Case II: If $x \in T'$ then the same argument works, with T in place of S.
> Hence
>
> $$(S \cup T)' \supseteq S' \cup T', \qquad (**)$$
>
> as required.

এবার উপসংহার--

> Combining (*) and (**),
>
> $$(S \cup T)' = S' \cup T',$$
>
> as required.

■

এই অংকে দেখলাম যে দুটো set-এর union নিলে তাদের derived set-দেরও union হয়ে যায়। একই ব্যাপার তিনটে, চারটে কিংবা যেকোনো finite-সংখ্যক set-এর ক্ষেত্রেই খাটে। তার জন্য দুটো দুটো করে union নিলেই চলে, যেমন $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ হলে

$$(A \cup B \cup C)' = ((A \cup B) \cup C)' = (A \cup B)' \cup C = A' \cup B \cup C'.$$

কিন্তু infinitely many set-এর বেলায় সমস্যা হতে পারে--

Example 8: ধরো তোমাকে infinitely many set দিলাম, $A_1, A_2, A_3, ...$ যেখানে

$$A_1 = \{1\}, \quad A_2 = \left\{\tfrac{1}{2}\right\}, \quad A_3 = \left\{\tfrac{1}{3}\right\}, ...$$

তবে কি $\left(\cup_n A_n\right)' = \cup_n A_n'$ হবে?
SOLUTION: এখানে প্রতিটা A_n-ই হল finite, তাই $\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n' = \phi$.
সুতরাং $\cup_n A_n' = \phi$. কিন্তু $\cup_n A_n$ তো সেই বিখ্যাত $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$, যার derived set হল $\{0\} \neq \phi$. ■

Exercise 10: যদি $S, T \subseteq \mathbb{R}$ হয় তবে কি একথা ঠিক যে

$$(S \cap T)' = S' \cap T'?$$

এই তিনটে উদাহরণ নিয়ে পরীক্ষা করে দ্যাখো--
(1) $S = (0,2), T = (1,3)$, **(2)** $S = [0,1], T = [1,2]$, **(3)** $S = [0,1), T = (1,2]$. প্রতিক্ষেত্রে ছবি এঁকো কিন্তু!
■

Exercise 11: Prove that for any $S, T \subseteq \mathbb{R}$ we have $(S \cap T)' \subseteq S' \cap T'$. ■

আমরা দ্বিতীয় অধ্যায়ে শিখেছিলাম $A, B \subseteq \mathbb{R}$ হলে $A + B$ আর $A - B$ মানে কি। নীচের অংকদুটোয় সেটা কাজে লাগবে। সাবধান, $A - B$ মানে কিন্তু এখানে $A \setminus B$ নয়!

Exercise 12: Give an example to show that it is possible to have $(A+B)' \neq A' + B'$ for some $A, B \subseteq \mathbb{R}$. ■

Exercise 13: If $A, B \subseteq \mathbb{R}$ then is it true that $(A - B)' = A' - B'$? ■

1.3 Derived set বার করা

আমরা যখন $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$-এর derived set বার করে $\{0\}$ দেখিয়েছিলাম, তখন সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার করেছিলাম। এখন আমরা শিখেছি কি করে একটা set-এর derived set জানা থাকলে তার সঙ্গে সম্পর্কিত অন্যান্য set-এর derived set সহজে বার করা যায়। সেই বিদ্যেটাই এবার হাতেকলমে প্রয়োগ করার সময় এসেছে। নীচের প্রতিটা অংকেই একটা করে set দেওয়া থাকবে, যেটা কোনোভাবে $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$-এর সঙ্গে সম্পর্কিত। আমাদের কাজ হবে সেই সম্পর্কটাকে কাজে লাগিয়ে derived set-টা বার করা।

Example 9: Find the derived set of

$$S = \left\{(-1)^m + \frac{1}{n} | m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Here $\mathbb{N}$ denotes the set of all natural numbers.[2] **(2001)**
SOLUTION: প্রথমে ছবি এঁকে আন্দাজ করব যে কোথায় কোথায় ভীড় জমছে, তারপর অংক কষে প্রমাণ করব। লক্ষ কর যে যদি m একটা even (জোড়) সংখ্যা হয় তবে $(-1)^m = 1$, আর m odd (বিজোড়) হলে $(-1)^m = -1$. আর ওই $\frac{1}{n}$ সংখ্যাগুলো আমাদের পূর্বপরিচিত, ওরা ক্রমশঃই ছোটো হতে হতে 0-র দিকে যাচ্ছে। সুতরাং m-কে even নিয়ে যদি n-কে বাড়াতে থাকি তবে এই রকম সংখ্যা পাব--

$$1 + \tfrac{1}{1}, \quad 1 + \tfrac{1}{2}, \quad 1 + \tfrac{1}{3}, \quad 1 + \tfrac{1}{4}, \ldots$$

দেখাই যাচ্ছে যে এরা সবাই 1-এ গিয়ে ভীড় জমাচ্ছে। আবার যদি m-কে odd নিয়ে n-কে বাড়াতাম, তবে পেতাম

$$-1 + \tfrac{1}{1}, \quad -1 + \tfrac{1}{2}, \quad -1 + \tfrac{1}{3}, \quad -1 + \tfrac{1}{4}, \ldots,$$

যারা ভীড় করছে -1-এ গিয়ে। এছাড়া আর কোথাও কোনো ভীড় নেই (Fig 16)। সুতরাং বলতে পারি--

The derived set of S is $S' = \{-1, 1\}$.

এবার এটা অংক কষে প্রমাণ করার পালা। আমরা চেষ্টা করব আমাদের S-কে কোনোভাবে $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ দিয়ে প্রকাশ করতে। যেহেতু $(-1)^m$ সবসময়েই হয় $+1$ নয়তো -1, তাই--

$$\begin{aligned} S &= \left\{(-1)^m + \tfrac{1}{n} \ : \ m, n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \underbrace{\left\{-1 + \tfrac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}}_{A_1} \cup \underbrace{\left\{1 + \tfrac{1}{n} \ : \ m, n \in \mathbb{N}\right\}}_{A_2}. \end{aligned}$$

Then $A_1 = -1 + A$ and $A_2 = 1 + A$, where $A = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.
From standard result we know that $A' = \{0\}$.
By property of derived sets,

$$A_1' = -1 + A' = -1 + \{0\} = \{-1\},$$

and

$$A_2' = 1 + A' = 1 + \{0\} = \{1\}.$$

So by property of derived sets for finite unions,

$$S' = (A_1 \cup A_2)' = A_1' \cup A_2' = \{-1, 1\}.$$

■

Example 10: Given

$$E = \left\{\frac{n-1}{n+1} \ | \ n = 1, 2, ...\right\} \cup \{2, 3\},$$

find the set of all accumulation points and the set of isolated points of E.[3] **(1999)**
SOLUTION: মনে আছে নিশ্চয়ই যে accumulation point মানে হল limit point!

Let

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{(n+1)-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}.$$

Then

$$E = (1 - 2A) \cup \{2, 3\}.$$

So by standard property of derived sets for finite unions,

$$E' = (1 - 2A)' \cup \{2, 3\}',$$

where $A = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n = 2, 3, ...\right\}$.

লক্ষ কর এটা বস্তুতঃ আমাদের অতিপরিচিত সেই $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$-ই, খালি এখানে n-টা 2 থেকে শুরু হচ্ছে। খালি finitely many সংখ্যার পার্থক্য, তাই $A' = \{0\}$ হবে।

> But since $\{2,3\}$ is a finite set, $\{2,3\}' = \phi$.
> Also by standard property of derived sets, $(1-2A)' = 1-2A'$.
> Now A differs from $\{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ by only finitely many elements, so
>
> $$A' = \left\{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}' = \{0\}.$$
>
> So $E' = (1-2\{0\}) \cup \phi = \{1\}$.

■

এবার আরেকটু কঠিন অংক--

Example 11: Find the derived set of

$$E = \left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \;:\; m, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

SOLUTION: প্রথমে ছবি এঁকে বুঝে নিই set-টা দেখতে কিরকম। E-এর প্রতিটি সদস্যই m আর n দুটো সংখ্যা মিলিয়ে তৈরী। যেমন $m = 3$ আর $n = 9$ নিলে পাব $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$. দুটোকেই একসঙ্গে নাড়াচাড়া করলে মাথা গুলিয়ে যাবে। প্রথমে ধরো $m = 1$ বসিয়ে নিই। তবে E-এর মধ্যে একগুচ্ছ point পাব, যাদের চেহারা $\frac{1}{1} + \frac{1}{n},\; n \in \mathbb{N}$,-এর মত। Fig 17-এর একেবারে উপরে এদের দেখিয়েছি। দেখাই যাচ্ছে যে এরা ভীড় করছে 1-এর গায়। সুতরাং একটা limit point পাচ্ছি 1. যদি $m = 2$ নিতাম তবে ভীড়টা পেতাম $\frac{1}{2}$-এ (Fig 17-এর মাঝের ছবিটা)। বুঝতেই পারছ যে এইভাবে প্রত্যেকটা $\frac{1}{m}$-ই একটা করে limit point হবে। লক্ষ কর যে ভীড়গুলো ক্রমশঃ 0-র দিকে এগোচ্ছে, সুতরাং সব মিলিয়ে 0-তেও একটা ভীড় হবে। অতএব 0-ও একটা limit point. আর কোথাও কোনো ভীড় চোখে পড়ছে না। সুতরাং ছবি দেখে আন্দাজ করে ফেলেছি derived set-টা কি হবে--

> Shall show $E' = \underbrace{\left\{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}}_{A}$.

এবার দেখাতে হবে যে আর কোনো limit point নেই। এরজন্য প্রথমে লক্ষ কর যে যদি m, n-এর স্থানবিনিময় করলেও কিন্তু $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ একই থাকে। অতএব আমরা নিশ্চিন্তে $m \geq n$ ধরে নিতে পারি (বা $m \leq n$ ধরলেও আপত্তি ছিল না)। এতে কাজ করা সহজ হবে।

> We can write
>
> $$E = \left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \;:\; m \geq n \in \mathbb{N}\right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \;:\; m \geq n\right\}}_{E_n}.$$

অনেকগুলো set-এর union হিসেবে E-কে লেখা গেছে। সমস্যা হল set হয়ে গেছে infinitely many. যদি খালি finite সংখ্যক হত তবে তাদের derived set-এর union নিলেই চলত। যাই হোক E_n'-গুলো বার করি--

Now $\forall n \in \mathbb{N} \quad E_n = \frac{1}{n} + \underbrace{\left\{\frac{1}{m} \ : \ m \geq n\right\}}_{S_n}$.

Let $S = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Then S_n and S differ by finitely many elements. So $S'_n = S' = \{0\}$.

So $E'_n = \frac{1}{n} + S'_n = \frac{1}{n} + \{0\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

$\because E_n \subseteq E, \ \therefore E'_n \subseteq E'$.

Thus, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n} \in E'$.

এবার 0-কে limit point দেখাতে হবে--

Also $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \in E$.

$\therefore 2S \subseteq E$, and hence $2S' = 2\{0\} = \{0\} \subseteq E'$.

So $0 \in E'$.

Thus $A \subseteq E'$.

এইবার দেখাতে হবে যে আর কোনো limit point নেই। এর জন্য একটা কৌশল করব। E-কে finite-সংখ্যক set-এর union হিসেবে লিখব। একভাবে লেখার কায়দা হল

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \text{ বাকী সবাই।}$$

মানে $E_3 \cup E_4 \cup \cdots$-কে একটা পোঁটলার মধ্যে বেঁধে ফেলে "বাকী সবাই" নাম দিয়েছি। চাইলে প্রথম $k-1$-খানা E_i-কে আলাদা রেখে E_k থেকে পোঁটলাটা শুরু করতে পারতাম--

Fix any $k \in \mathbb{N}$.

Then
$$E = E_1 \cup \cdots \cup E_{k-1} \cup \underbrace{E_k \cup E_{k+1} \cup \cdots}_{F_k}.$$

এক্ষুণি যাকে "বাকী সবাই" বলছিলাম, তাকেই F_k নাম দিয়েছি। লক্ষ কর যে F_k হল সেই সব $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$-এর set যেখানে m, n দুজনেই $\geq k$. সুতরাং F_k-র মধ্যে সবচেয়ে বড় সংখ্যা হল $\frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$. তাই--

Now $F_k \subseteq \left(0, \frac{2}{k}\right]$.

$\therefore F'_k \subseteq \left(0, \frac{2}{k}\right]' = \left[0, \frac{2}{k}\right]$. So

$$E' = E'_1 \cup \cdots \cup E'_{k-1} \cup F'_k \subseteq \left\{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{k-1}\right\} \cup \left[0, \frac{2}{k}\right].$$

আমরা আগেই জানি যে $1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{k-1}$ ইত্যাদিরা E-এর limit point. প্রশ্ন ছিল আর নতুন কি কি limit point থাকতে পারে। এখন দেখতে পাচ্ছি যে নতুন যাই থাক তারা $\left[0, \frac{2}{k}\right]$ মধ্যেই সীমাবদ্ধ। এর মধ্যে 0-যে একটা limit point সেটাও আগেই দেখেছি। সুতরাং নতুন কোনো limit point থাকলে সেটা $\left(0, \frac{2}{k}\right]$-এর মধ্যে থাকবে।

So

$$E' \setminus A \subseteq \left(0, \tfrac{2}{k}\right].$$

Since $k \in \mathbb{N}$ is arbitrary, so

$$E' \setminus A \subseteq \bigcap_k \left(0, \tfrac{2}{k}\right] = \phi.$$

Hence $E' = A$, as required.

■

DAY 2
Derived set and closed set

2.1 Properties of derived sets

আমরা এতক্ষণ দেখলাম যে একটা set দেওয়া থাকলে কি ভাবে তার limit point-গুলো বার করতে হয়, বা অন্যভাবে বললে, তার derived set-টা বার করতে হয়। এবার উল্টোটা করবার চেষ্টা করি--

Example 12: এমন একটা set দাও যার একটাই limit point 0.

এর একটা উত্তর আমরা একটু আগেই দেখেছি--

$$\{\tfrac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

অবশ্য এটা মোটেই একমাত্র উত্তর নয়, আরেকটা উত্তর হতে পারত $\{-\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, বা $\{\frac{1}{n^2} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. ■

এবার প্রশ্নটাকে আরেকটু কঠিন করা যাক।

Exercise 14: এমন একটা set দাও যার একমাত্র limit point হল 10. ■

Exercise 15: এমন একটা set দাও যার কেবল মাত্র দুটো limit point 0 আর 10. ■

Exercise 16: এমন একটা set দাও যার কেবল মাত্র তিনটে limit point $0, 2$ আর 6. ■

Exercise 17: এমন একটা set দিতে পারো যার কোনোই limit point নেই? এরকম একটা infinite set দিতে পারো? ■

এই অংকগুলো সবারই মূল কায়দা একই, এবং সেই একই কায়দায় যে কোনো finite set-কে derived set করে set বানানো যায়। এবার তাহলে infinite set-এ হাত দেওয়া যাক।

Exercise 18: এমন একটা set দাও যার derived set হল $[0,1]$. এইটার একটা সহজ উত্তর হল $[0,1]$ নিজেই। আরেকটা উত্তর হল $(0,1)$. আরও উত্তর সম্ভব যেমন $(0,1]$ বা $[0,1)$.
আরও অনেক উত্তর সম্ভব। আরো তিনটে উত্তর বার কর তো! ■

এই বার একটু প্যাঁচে ফেলা যাক!

Example 13: এমন একটা set দিতে পারো যার derived set হল $(0,1]$?

SOLUTION: লক্ষ কর যে $(0,1]$-এর মধ্যে যে কোনো সংখ্যাই হবে limit point. তার মানে $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$ এরা সবাই limit point. সুতরাং এরা সবাই ভীড়ের মধ্যে বা ভীড়ের গা ঘেঁসে দাঁড়িয়ে আছে। এদিকে n যত বাড়ছে, $\frac{1}{n}$ ততই 0-র দিকে এগোচ্ছে। তার মানে ভীড়টা একেবারে 0 পর্যন্ত গেছে। তাহলে তো 0 নিজেই ভীড়ের গা ঘেঁসে রয়েছে, অর্থাৎ 0 নিজেই একটা limit point. কিন্তু derived set বলে দিয়েছে $(0,1]$, যার মধ্যে 0 নেই! সুতরাং এরকম উদাহরণ পাওয়া অসম্ভব। ■

তার মানে বোঝো, যেকোনো set-ই কিন্তু derived set হতে পারে না। ঠিক কি কি শর্ত পালিত হলে একটা set-এর পক্ষে derived set হওয়া সম্ভব? একটা শর্ত হল derived set-কে সব সময়ে closed হতে হবে।

Example 14: Prove that the derived set of a subset of real numbers is a closed set. **(2001,2003,2004,2009)**

SOLUTION: প্রথমে কি দেখাতে হবে সেটা লিখে শুরু করি--

> Let $A \subseteq \mathbb{R}$.
> To show: A' is closed in $\mathbb{R}$,

কোনো set-কে closed প্রমাণ করার অর্থ তার complement-কে open দেখানো।

> *i.e.*, $(A')^c$ is open in $\mathbb{R}$,

সুতরাং open set-এর সংজ্ঞা থেকে--

> *i.e.*,
> $\forall b \in (A')^c \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(b,\epsilon) \subseteq (A')^c$.

এবার তবে প্রমাণ শুরু করা যাক। গোড়াতেই $\forall$ আছে, তাই--

$\boxed{\forall b}$ If $(A')^c = \phi$, then it is vacuously true. Otherwise, take any $b \in (A')^c$.

এখন "$b \in (A')^c$" মানে কি? এর মানে b সংখ্যাটা A-র limit point নয়, অর্থাৎ b-কে ঘিরে খানিকটা ফাঁকা জায়গা পাওয়া যাবে, যেটা A-র ঘাড়ে গিয়ে পড়বে না। বা অন্যভাবে বললে, ফাঁকা জায়গাটা পুরোটাই A^c-এর ভিতরে থাকবে।

> $\exists \epsilon > 0$ s.t. $N(b,\epsilon) \subseteq A^c$.

আমরা দেখাব যে এই ϵ দিয়েই আমাদের কাজ চলবে।

Shall show:

$$N(b,\epsilon) \subseteq (A')^c,$$

i.e.,

$\forall x \in N(b,\epsilon) x \in (A')^c.$

আবার একটা $\forall$ এসে উপস্থিত হয়েছে, সুতরাং--

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in N(b,\epsilon)$.

x-কে ঘিরে খানিকটা ফাঁকা জায়গা বার করব $N(b,\epsilon)$-এর ভিতরে। সেটা করা যাবে কারণ $N(b,\epsilon)$ একটা open set.

Since $N(b,\epsilon)$ is open

$$\exists \delta > 0 \quad N(x,\delta) \subseteq N(b,\epsilon) \subseteq A^c.$$

তার মানে x-কে ঘিরে এমন কিছুটা ফাঁকা জায়গা বেরিয়ে গেল, যা A-র ঘাড়ে গিয়ে পড়েনি।

So x cannot be a limit point of A. Hence $x \in (A')^c$.

আমরা যে কোনো একটা x নিয়ে কাজ করছিলাম। সুতরাং--

Since $x \in N(b,\epsilon)$ was arbitrary, we have proved that $N(b,\epsilon) \subseteq (A')^c$.

তারও আগে আমরা যে কোনো b নিয়ে শুরু করেছিলাম। তাই--

Since $b \in (A')^c$ was arbitrary, this proves $(A')^c$ is open in $\mathbb{R}$, and so A' is closed in $\mathbb{R}$, as required.

2.2 Limit point দিয়ে closed set

Limit point-এর সঙ্গে closed set-এর নিবিড় সম্পর্ক আছে। বস্তুতঃ closed set-এর একটা সংজ্ঞা দেওয়া যায় limit point ব্যবহার করে। আমরা closed set-এর যে definition-টা নিয়ে এতক্ষণ কাজ করেছি সেটা ছিল--

> একটা set-কে closed বলব যদি তার complement-টা open হয়।

Limit point দিয়ে একই definition অন্যভাবে লেখা যায়--

> একটা set-কে closed বলব যদি তার সব limit point-ই set-টার মধ্যে থাকে।

আমরা দেখেছি যে একটা set-এর limit point সব সময়ে সেই set-এর ভিতরে নাও পড়তে পারে, যেমন $(0,1]$-এর একটা limit point হল 0, যেটা $(0,1]$-এর বাইরে। (আবার $\frac{1}{2}$ হল আরেকটা limit point, সেটা অবশ্য $(0,1]$-এর ভিতরেই আছে।) যদি একটাও limit point-কে দেখা যায় যে set-এর বাইরে চলে গেছে, তবে সেই set-টা closed হতে পারে না। যদি কোনো limit point বাইরে না থাকে, তবে set-টা closed.

Example 15: Define a closed set in $\mathbb{R}$ in terms of its derived set.[1] **(2006)**

SOLUTION:

DEFINITION: Closed set (using derived set)

$A \subseteq \mathbb{R}$ is called <u>closed</u> if its derived set $A' \subseteq A$.

■

Example 16: এই definition থেকে বল $(0, 1]$ একটা closed set কি না।

SOLUTION: না, কারণ 0 হল এই set-টার একটা limit point, কিন্তু $0 \notin (0, 1]$.
একই কথা derived set ব্যবহার করেও লেখা যেত--$(0, 1]$-এর derived set হল $[0, 1]$, এবং $[0, 1] \not\subseteq (0, 1]$. ■

আচ্ছা, যদি একটা set-এর আদৌ কোনো limit point না থাকে, তবে কি হবে? উত্তর হল, এরকম যে কোনো set অবশ্যই closed হতে বাধ্য, কারণ closed হবার জন্য খালি একটাই শর্ত দরকার--set-এর বাইরে যেন কোনো limit point না থাকে। যার আদৌ কোনো limit point নেই, তার বেলায় আর set-এর বাইরে limit point কোথা থেকে আসবে?

Example 17: দেখাও যে $S = \{0, 1, 2\}$ একটা closed set.

SOLUTION: যেহেতু S একটা finite set, তাই এর কোনো limit point নেই, তাই S হল closed.
Derived set দিয়ে ভাবলে, $S' = \phi$. যেহেতু ϕ সব set-এরই subset, তাই $\phi \subseteq S$, মানে $S' \subseteq S$. সুতরাং S একটা closed set. ■

Example 18: Show that a set of real numbers is closed if and only if its complement is open.[2+2] **(2003)**
SOLUTION: এখানে বস্তুত একটার মধ্যে দুটো অংক রয়েছে। একদিকে দেখাতে হবে যে যে কোনো closed set-এর complement open হতে বাধ্য। অন্যদিকে দেখাতে হবে যদি কোনো set-এর complement open হয় তবে মূল set-টা closed হতে বাধ্য। দুটোকে একসাথে মিলিয়ে প্রমাণ করতে বলা হয়েছে যে--

To show:

$\forall A \subseteq \mathbb{R}(A$ is closed $\Leftrightarrow A^c$ is open$)$.

এরকম "if and only if" (অংকের ভাষায় যেটা $\Leftrightarrow$)-ওয়ালা প্রমাণকে সাধারণতঃ দুভাগে ভেঙে নিলে সুবিধা হয়--একবার দেখাব $\Rightarrow$ অংশটা, মানে

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}(A \text{ is closed } \Rightarrow A^c \text{ is open}),$$

আর তারপর $\Leftarrow$ অংশটা--

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}(A \text{ is closed } \Leftarrow A^c \text{ is open}).$$

যেটা খুশী দিয়ে শুরু করা যায়। আমরা $\Rightarrow$-টা দিয়ে শুরু করি--

<u>Proof of $\Longrightarrow$:</u>

Given: A is closed.

To show: A^c is open, ie,

$\forall x \in A^c \exists \epsilon > 0 \quad N(x, \epsilon) \subseteq A^c.$

শুরুতে "$\forall x \in A^c$" আছে, অতএব--

$\boxed{\forall x}$ If $A^c = \phi$, then vacuously true. Otherwise, take any $x \in A^c$.

Fig 18 দ্যাখো। এবার একটা $\exists \epsilon > 0$ আছে। একটা জুৎসই $\epsilon > 0$ বার করতে একটু মাথা ঘামানো যাক।
A যেহেতু closed, তাই A-এর সব limit point-ই A-র ভিতরে। এদিকে x রয়েছে A^c-এ, অর্থাৎ A-র বাইরে। সুতরাং xকিছুতেই A-এর limit point হতে পারে না।

Since A is closed, all its limit points are inside A.

But $x \notin A$.

So x is not a limit point of A.

Hence $\exists \epsilon > 0$ s.t. $N'(x, \epsilon) \subseteq A^c$.

$\boxed{\exists \epsilon}$ Choose this ϵ.

অনেকটা এরকম একটা জিনিসই আমরা চাইছিলাম--x-কে ঘিরে A^c-এর মধ্যে একটুখানি ফাঁকা জায়গা, এমন একটা $\epsilon > 0$ যাতে $N(x, \epsilon) \subseteq A^c$ হয়। প্রায় সেটাই পেয়ে গিয়েছি, খালি $N(x, \epsilon)$-এর জায়গায় $N'(x, \epsilon)$ এসে গিয়েই মুস্কিল। কিন্তু তাতে কোনো অসুবিধা নেই, কারণ $N(x, \epsilon)$ আর $N'(x, \epsilon)$-এর পার্থক্য তো কেবল x-এ। এদিকে $x \in A^c$. সুতরাং--

Since $x \in A^c$, so $N(x, \epsilon) \subseteq A^c$.

তার মানে এই ϵ দিয়েই আমাদের কাজ চলতে পারে!
এবার সেই প্রচলিত উপসংহার--

Since $x \in A^c$ was arbitrary this completes the proof of the $\Rightarrow$" part.

এই তো গেল $\Rightarrow$-র প্রমাণ, এবার $\Leftarrow$-র পালা।

<u>Proof of $\Leftarrow$:</u>

Given: A^c is open in $\mathbb{R}$.

To show: A is closed in $\mathbb{R}$, *i.e.*,

 $\forall x \in A'$ we must have $x \in A$.

গোড়াতে $\forall$ আছে, সুতরাং--

$\boxed{\forall x}$ If $A' = \phi$, then vacuously true. Otherwise, take any $x \in A'$.

আমরা এখানে proof by contradiction করব। দেখাতে হবে $x \in A$. সুতরাং আমরা শুরু করব এর উল্টোটা ধরে।

Let, if possible, $x \notin A$.
Then $x \in A^c$, which is open.
So $\exists \epsilon > 0$ s.t. $N(x, \epsilon) \subseteq A^c$.
Hence $N'(x, \epsilon) \cap A = \phi$,
i.e., x is not a limit point of $A.(\Rightarrow\Leftarrow)$

একটা contradiction -এ পৌঁছনোই হচ্ছে proof by contradiction-এর লক্ষ্য। সেই লক্ষ্য সিদ্ধ হয়েছে। অতএব এখন উপসংহার টানার পালা।

So our assumption that $x \notin A$ is false.
Since $x \in A'$ was arbitrary, this completes the proof of the "$\Longleftarrow$" part.

■

Exercise 19: Prove that the complement of an open set is a closed set. State whether its converse is true.[2+1] **(2006,2008)**
HINT:
এই অংকটা বস্তুতঃ আগের অংকটারই রূপান্তর। খালি এখানে দ্বিতীয় অংশটা করার আগে converse-টা লিখে নেওয়া ভালো--

The converse statement:
If the complement of a set is closed, then the set must be open.

এই অংকে অবশ্য এটাকে প্রমাণ করতে বলেনি। খালি এটুকু লিখে দিলেই হবে যে--

This converse is true.

■

একই অংক আবার।

Exercise 20: Let G be an open set in $\mathbb{R}$. Show that $\mathbb{R} - G$ is a closed set.[3] **(2012.2a (part 1))** ■

Exercise 21: Find the derived set of the set $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$ and state with reason whether this set is closed.[2] **(2010.9b)**
HINT:
আমরা আগের **??** নম্বর অংকেই দেখিয়েছি যে 0 এই set-টার একটা limit point. ওই অংকটা অবশ্য অনেক লম্বা ছিল, কারণ ওখানে এটাও দেখিয়েছিলাম যে 0-ই একমাত্র limit point. এই দ্বিতীয় অংশটা এখানে লাগছে না।

$\because \{0\} \not\subseteq \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$
$\therefore$ the set is not closed.

■

নীচের অংকটা দেখতে অন্যরকম হলেও আসলে জিনিসটা একই। খালি শুরুটা ধরিয়ে দিচ্ছি।

Example 19: Correct or justify: $\left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \cos\frac{1}{x} = 0\right\}$ is not a closed set.[3] **(2012.1ci)**

SOLUTION: প্রথমে ভেবে নিই set-টা দেখতে কিরকম। কখন $\cos\frac{1}{x} = 0$ হয়? যখন $\frac{1}{x}$ দেখতে হয় $(2n-1)\frac{\pi}{2}$-এর মত, যেখানে $n \in \mathbb{Z}$. তার মানে x হবে $\frac{2}{\pi(2n-1)}$-এর মত দেখতে। অর্থাৎ আমাদের set-টা হচ্ছে

$$\left\{\frac{2}{\pi(2n-1)} \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

একটু ভাবলেই বুঝবে যে n যতই ∞ বা $-\infty$-র দিকে যাচ্ছে, ততই point-গুলো 0-র কাছে ভীড় জমাচ্ছে। ফলে ছবিটা হচ্ছে Fig 19-এর মত। সন্দেহ নেই নিশ্চয়ই যে 0 একটা limit point, অথচ 0 নিজে কিন্তু set-টার মধ্যে নেই। সুতরাং set-টা আর closed হয় কি করে?
এবার এটা ধাপে ধাপে গুছিয়ে লেখো দেখি, ঠিক আগের অংকটার মত করে। ■

Example 20: Let $A \subset \mathbb{R}$ and G be an open subset of $\mathbb{R}$. If A' denotes the set of all limit points of A then show that $G \cap A' = \phi$ whenever $G \cap A = \phi$. [3] **(1998,2006)**

SOLUTION: প্রথমে লিখে শুরু করি কি দেওয়া আছে আর কি দেখাতে হবে--

> Given: $A \subset \mathbb{R}$ any subset, $G \subset \mathbb{R}$ open, $G \cap A = \phi$.
> To show: $G \cap A' = \phi$.

আমরা এখানে proof by contradiction করব।

> Let, if possible, $G \cap A' \neq \phi$.

যদি $G \cap A' \neq \phi$ হয় তবে এর মধ্যে অন্ততঃ একটা point আছে। এইরকম একটা point নিই--

> Pick any $x \in G \cap A'$.

যেহেতু G open তাই x-কে ঘিরে G-এর মধ্যে কিছুটা ফাঁকা জায়গা পাব।

> Since G is open, and $x \in G$, so $\exists \epsilon > 0 \quad N(x, \epsilon) \subseteq G$.

এদিকে x আবার A'-এর মধ্যেও আছে, তার মানে x-কে একেবারে ছুঁয়ে A-র প্রচুর element রয়েছে। তাদের অনেকেই $N(x, \epsilon)$-এর মধ্যে ঢুকে পড়বে। মানে $N(x, \epsilon) \cap A \neq \phi$ হবে। বস্তুতঃ এটাই limit point-এর সংজ্ঞা।

> Also, since $x \in A'$ we must have
> $N'(x, \epsilon) \cap A \neq \phi$.
> But $N'(x, \epsilon) \subseteq N(x, \epsilon) \subseteq G$.
> So $G \cap A \neq \phi$.$(\Rightarrow\Leftarrow)$

এবার proof by contradiction-এর চিরাচরিত উপসংহার--

So our assumption that $G \cap A' \neq \phi$ was wrong. This completes the proof.

■

2.3 Closure

আমরা জানি যে একটা set-এর limit point সেই set-টার বাইরেও থাকতে পারে, যেমন $(0,1]$-এর একটা limit point হল 0, যেটা set-টার বাইরে। যদি আমরা সবগুলো limit point-কে set-এর ভিতর ঢুকিয়ে নিই, তবে যে নতুন set-টা পাব তাকে বলে গোড়ার set-টার closure. যেমন $(0,1]$-এর একটা limit point-ই খালি set-এর বাইরে ছিল--0, সেটাকে অন্তর্ভুক্ত করে নিলে পাব $(0,1] \cup \{0\} = [0,1]$. সুতরাং $(0,1]$-এর closure হল $[0,1]$.

DEFINITION: **Closure of a set**

Let $A \subseteq \mathbb{R}$. Then the **closure** of A means the set

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Example 21: Prove that the closure of a nonempty set is closed.[3] **(2007)**

SOLUTION: এখানে set-টার nonempty হবার কোনো দরকার নেই।
এই প্রমাণটা খুব লম্বা নয়, কিন্তু খানিকটা প্যাঁচালো। সুতরাং একবারে পড়ে না বুঝলে দমে যেও না, বার কয়েক ধীরে ধীরে ঠাণ্ডা মাথায় পড়।
প্রথমে লিখে নেব কি দেখাতে হবে--

Let $A \subseteq \mathbb{R}$.
Shall show $\overline{A}$ is closed,
i.e., $\overline{A}^c$ is open, *i.e.*,
$\forall x \in \overline{A}^c \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(x,\epsilon) \subseteq \overline{A}^c$.

প্রথমে যেহেতু $\forall x$ আছে, তাই--

$\forall y$ If $\overline{A}^c = \phi$, then vacuously true. Otherwise, take any $x \in \overline{A}^c$.

এই অংকটায় দুবার $(\overline{A})^c$-এর উল্লেখ আছে, সেটাকে একটু অন্যভাবে লিখে নিলে সুবিধা হবে। যেহেতু $\overline{A} = A \cup A'$, তাই এই complement-টাকে de Morgan's law দিয়ে লেখা যাবে--

Now $\because \overline{A} = A \cup A'$
$\therefore (\overline{A})^c = A^c \cap (A')^c$, by de Morgan,

এবার আমরা একটা যুৎসই $\epsilon > 0$ খুঁজব, কারণ এর পর একটা $\exists \epsilon > 0$ আছে।

$\because x \notin A'$, $\exists \epsilon > 0$ such that $N'(x, \epsilon) \subseteq A^c$.

$\boxed{\exists\epsilon}$ Choose this ϵ.

এই ϵ-টা দিয়েই আমাদের কাজ চলবে। তার জন্য দেখাতে হবে $N(x, \epsilon) \subseteq (\overline{A})^c$, অর্থাৎ $N(x, \epsilon) \subseteq A^c \cap (A')^c$. এইটাকে দুভাগে ভেঙে দেখাব--$N(x, \epsilon) \subseteq A^c$ এবং তার পরে $N(x, \epsilon) \subseteq (A')^c$.

$\because x \in A^c$ and $N'(x, \epsilon) \subseteq A^c$,

$\therefore N(x, \epsilon) \subseteq A^c$.

এবার দেখাব $N(x, \epsilon) \subseteq (A')^c$. তার জন্য $N(x, \epsilon)$-এর যে কোনো একটা সংখ্যা y নিয়ে দেখাব যে সেটা $(A')^c$-এও আছে।

Shall show $N(x, \epsilon) \subseteq (A')^c$, *i.e.*,

$\forall y \in N(x, \epsilon) \quad y \in (A')^c$,

Take any $y \in N(x, \epsilon)$.

$\because N(x, \epsilon)$ is open,

$\therefore \exists \delta > 0$ such that $N(y, \delta) \subseteq N(x, \epsilon)$.

এদিকে $N(x, \epsilon) \subseteq A^c$ দেখিয়েছিলাম। তার মানে $N(y, \delta) \subseteq A^c$. সুতরাং y-কে ঘিরে খানিকটা ফাঁকা জায়গা পাওয়া যাচ্ছে যেটা A-র গায় গিয়ে পড়ে না, ফলে y কোনোমতেই A-র limit point হতে পারে না।

$\therefore N(y, \delta) \subseteq A^c$.

$\therefore N'(y, \delta) \cap A = \phi$.

$\therefore y \in (A')^c$.

Since $y \in N(x, \epsilon)$ was arbitrary, we have $N(x, \epsilon) \subseteq (A')^c$, completing the proof.

■

আমরা আগে দেখিয়েছিলাম যে কোনো set-এর interior হল তার সবচেয়ে বড় open subset. ঠিক একই রকম একটা কথা খাটে closure-এর বেলাতেও--

Exercise 22: Prove that the closure of a set $A \subseteq \mathbb{R}$ is the smallest closed set containing A. ■

মনে আছে আমরা বলেছিলাম যে interior হল যেন আমের শাঁস, আর boundary point-গুলো হল খোসা। সেইভাবে দেখলে closure হল খোসাসুদ্ধ আমটা। নীচের অংকে এই কথাটাই প্রমাণ করতে বলেছে--

Exercise 23: Let $A \subseteq \mathbb{R}$ and let B be the set of all boundary points of A. Then prove that $\overline{A} = A \cup B$. ■

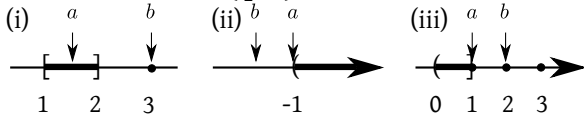
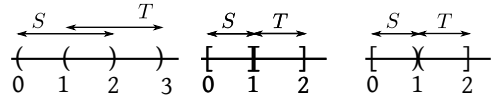
Exercise 24: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে $(\overline{A})^c$ এবং $(A^c)^\circ$ (অর্থাৎ A^c-এর interior) বার কর। এরা কি যে কোনো $A \subseteq \mathbb{R}$-এর জন্যই সমান?
(1) $A = (0,1)$ **(2)** $A = [0,1)$ **(3)** $A = [-10, \infty)$
■

Exercise 25: Prove that for all $A \subseteq \mathbb{R}$ we have $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$. ■

Exercise 26: Let $\bar{A}$ be the closure of a set A. If B is a closed set with $A \subseteq B$, then show that $\bar{A} \subseteq B$. ■

Answers

1. (a) $[0,1] \cup \{3\}$, (b) $\{2,3\}$, (c) $[1,5]$, (d) ϕ. **2.** **(1)** ϕ, **(2)** $[-1,2] \cup [3,4]$ **(3)** ϕ **(4)** ϕ **(5)** $\{-1,1\}$.
3. $\forall \epsilon > 0 \quad \min\left\{\frac{\epsilon}{2}, 1\right\} \in N'(0,\epsilon) \cap (-1,2)$. **4.**

(i) a b (ii) b a (iii) a b
1 2 3 -1 0 1 2 3

5. $\because \ell \notin A, \quad \therefore \ell \in bdry(A) \iff \forall \epsilon > 0 \quad N(\ell,\epsilon) \cap A \neq \phi \iff \forall \epsilon > 0 \quad N'(\ell,\epsilon) \cap A \neq \phi \iff \ell \in A'$. **6.** $0 \in bdry(\{0\}), \quad 0 \notin \{0\}'$. $0 \notin bdry((-1,1)), \quad 0 \in (-1,1)'$. **7.** এটা আসলে (**??**) নম্বর অংকটাই, খালি A-র জায়গায় A^c বসিয়ে নাও। **8.** যদি $a \notin A'$ হয়, তবে $\exists \epsilon > 0 \quad N'(a,\epsilon) \cap A = \phi$. মানে $N'(a,\epsilon) \subseteq A^c$. এবার যাই $\delta > 0$ নাও $N'(a,\epsilon) \cap N'(a,\delta) \neq \phi$. সুতরাং $N'(a,\delta) \cap A^c \neq \phi$. **9.** যদি $a \in A^\circ$ হয়, তবে $\exists \epsilon > 0 \quad N(a,\epsilon) \subseteq A$. এবার যাই $\delta > 0$ নাও, $N'(a,\delta) \cap N(a,\epsilon) \neq \phi$. সুতরাং $N'(a,\delta) \cap A \neq \phi$. দ্বিতীয় অংশের জন্য $A = [0,1]$ নাও। তবে $0 \in A'$ কিন্তু $0 \notin A^\circ$. **10.** দ্বিতীয় আর তৃতীয় ক্ষেত্রে ঠিক নয়।

S T S T S T
0 1 2 3 0 1 2 0 1 2

(1) $(S \cap T)' = [1,2] = S' \cap T'$, **(2)** $(S \cap T)' = \phi, \quad S' \cap T' = \{1\}$,
(3) $(S \cap T)' = \phi, \quad S' \cap T' = \{1\}$.
11. $\ell \in (S \cap T)' \implies \forall \epsilon > 0 \quad N'(\ell,\epsilon) \cap (S \cap T) \neq \phi \implies \forall \epsilon > 0 \quad N'(\ell,\epsilon) \cap S \neq \phi$ আর $N'(\ell,\epsilon) \cap T \neq \phi. \quad \therefore \ell \in S' \cap T'$. **12.** $A = \mathbb{N}, \quad B = \{-m + \frac{1}{m} \ : \ m \in \mathbb{N}\}$ নিলে $A' = B' = \phi$, কিন্তু $0 \in (A+B)'$ যেহেতু $\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq A + B$. **13.** না, $A = \mathbb{N}, \quad B = \{m - \frac{1}{m} \ : \ m \in \mathbb{N}\}$ নিয়ে দ্যাখো।
14. $\{10 + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. **15.** $\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{10 + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.
16. $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{2 + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{6 + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$. **17.** $\{1,2,3\}, \mathbb{N}$.
18. $(0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1)$, $(0,1) \setminus \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$, $\left(0,\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4},1\right)$. **22.** তা না হলে এমন closed B পাবে, যাতে $A \subseteq B \subset \overline{A}$. কিন্তু $A \subseteq B$ হলে $A' \subseteq B' = B$, কারণ B closed. তাই $A \cup A' \subseteq B$, মানে $\overline{A} \subseteq B (\Rightarrow\Leftarrow)$. **23.** A-র যেসব limit point রয়েছে A-র বাইরে, তারা সবাই A-র boundary point.
24. **(1)** $(-\infty,0) \cup (1,\infty)$, **(2)** $(-\infty,0) \cup (1,\infty)$, **(3)** $(-\infty,10)$.হ্যাঁ, সব সময়েই সমান।
25. $a \in (\overline{A})^c \iff (a \notin A, \quad a \notin A') \iff \exists \epsilon > 0 \quad N(a,\epsilon) \subseteq A^c \iff a \in (A^c)^\circ$. **26.** $A \subseteq B$ তাই $A' \subseteq B' = B$, যেহেতু B হল closed. সুতরাং $\bar{A} = A \cup A \subseteq B$.

Chapter V
Completeness

DAY 1
Supremum and infimum

1.1 জিনিসটা কি?

ধর তোমাকে জিজ্ঞাসা করা হল যে $\{1, 2, 4\}$ set-টার মধ্যে maximum সংখ্যাটা কত? তুমি বলবে 4. যদি জিজ্ঞাসা করি $[0, 1]$-এর মধ্যে maximum কত? তবে উত্তর হবে 1. যদি বলি $\mathbb{N}$-এর মধ্যে maximum সংখ্যা কি আছে? এর উত্তর অসম্ভব, কারণ $\mathbb{N}$ set-টা $1, 2, 3, 4, \ldots$ করে বেড়েই চলেছে, কোথাও থামছে না। এরকম set-কে আমরা বলি unbounded above. এর মধ্যে যে সংখ্যাই নাও না কেন তার পরের সংখ্যাটাও $\mathbb{N}$-এর মধ্যে আছে। তাই বলব যে $\mathbb{N}$-এর কোনো maximum নেই। আচ্ছা $\mathbb{N}$-এর কি কোনো minimum আছে? হ্যাঁ, সেটা আছে-- 1.

Exercise 1: $\mathbb{Z}$-এর কি maximum বা minimum আছে? ■

Example 1: $(0, 1)$-এর maximum কত? Minimum-ই বা কত?

SOLUTION: লক্ষ কর যে $(0, 1)$ কিন্তু unbounded above বা unbounded below নয়। এটা দিব্যি 0 থেকে 1-এর মধ্যে রয়েছে, ∞ বা $-\infty$-র দিকে হাত বাড়ায় নি। কিন্তু তাও কি $(0, 1)$-এর কোনো maximum আছে? যদি বল যে এই set-এর maximum সংখ্যা হল 1, তবে সেটা ভুল হবে, কারণ 1 আদৌ এই set-এর কোনো সংখ্যাই নয়--$1 \not\in (0, 1)$. অথচ 1-এর চেয়ে ছোটো কেউও maximum হতে পারে না, যেমন তুমি যদি 0.9-কে maximum ভাবো, তবে আমি তার চেয়েও বড় 0.99 দেখিয়ে দেব, আবার তারও চেয়ে বড় 0.999 আছে, এবং এভাবে চলতেই থাকবে। এখানে 1-কেই $(0, 1)$-এর maximum number বলতে ইচ্ছে করছে, কিন্তু সেটাও বলা যাচ্ছে না। এইখানে আমরা বলব যে 1 হল $(0, 1)$-এর "supremum". ■

এই যে নতুন কথাটা শিখলাম--**supremum,** সেটা অংকে অত্যন্ত প্রয়োজনীয় একটা জিনিস। এবার ছবি দেখে supremum ব্যাপারটা বুঝতে শিখব।

Example 2: $(0, 3) \cup \{5\}$ set-টার supremum বার কর।

SOLUTION:
Fig 1-এ $(0, 3) \cup \{5\}$-র ছবি রয়েছে। এর supremum বার করার জন্য আমরা প্রথমে এই set-এর ডানদিকে $\mathbb{R}$-এর উপর কোথাও আঙুল রাখব। তার মানে set-টার যাবতীয় point-ই রয়েছে আমার আঙুলের বাঁদিকে। এবার আঙুলটাকে আমি ক্রমশঃ বাঁদিকে সরাতে থাকব, খালি লক্ষ রাখব যেন set-এর কোনো point আঙুলের ডানদিকে চলে না যায়। এইভাবে সরতে

Fig 1

0 1

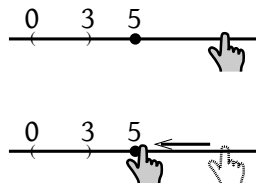
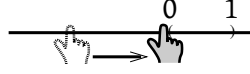



Fig 2

সরতে আঙুলটা যেখানে এসে আটকে যাবে সেটাকেই বলব set-টার supremum. এখানে আঙুলটা 5-এ এসে আটকে যাবে, তার মানে 5 হল আমাদের set-টার supremum. ■

Exercise 2: নীচের set-গুলোর supremum বার কর।
(1) $\{1,2,3\}$, **(2)** $[0,1]$ **(3)** $[0,1)\cup(2,3]$. ■

Supremum বার করার জন্য আমরা আঙুলটাকে ডানদিক থেকে set-টার গায় চেপে আনলাম। যদি তার উল্টোটা করতাম, মানে বাঁদিকে থেকে চেপে আনতাম তবে পেতাম set-টার infimum.

Example 3: $(0,1)$-এর infimum কত?

SOLUTION: Fig 2 থেকে দেখা যাচ্ছে যে infimum-টা হল 0. ■

লক্ষ কর যে একটা set-এ যদি কোনো সংখ্যা maximum হয় তবে সেটাই হবে set-টার supremum, যেমন $(0,3)\cup\{5\}$-এর maximum ছিল 5, এবং সেটাই supremum হল। কিন্তু যদি একটা set-এ কোনো maximum নাও থাকে, তাহলেও supremum থাকতে পারে, যেমন $(0,1)$-এর ক্ষেত্রে। একইভাবে কোনো set-এ minimum থাকলে সেটাই infimum হতে বাধ্য, কিন্তু যদি minimum নাও থাকে তাও infimum থাকতে পারে, যেমন $(0,1)$-এর বেলায়।

Example 4: Find the supremum of the set

$$\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\ :\ p,q\in\mathbb{N}\right\}.$$

[2] **(2009)**
SOLUTION: কোনো set-এর supremum বার করার আগে প্রথমেই দেখে নেওয়া ভালো যে তার মধ্যে কোনো maximum number আছে কিনা। একটু চিন্তা করলেই দেখবে যে আমাদের set-এর maximum number হল 2, কারণ $p=q=1$ নিলে $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=2$ হবে, আর p,q বাড়ালে $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ কমবে ছাড়া বাড়বে না!

> Let A be the given set.
>
> Then $2=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\in A$.
>
> Also $\forall p,q\in\mathbb{N}$ we have
> $$\frac{1}{p},\frac{1}{q}\le 1,$$
> and so
> $$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\le 1+1=2.$$
> So 2 is the maximum element of A.

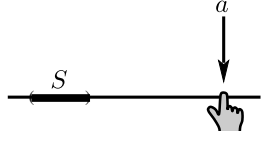
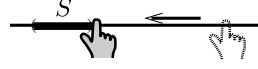



Fig 3 **Fig 4**

Hence $\sup A = 2$.

■

1.2 Mathematical definition

এবার আমরা supremum-এর সংজ্ঞাটা অংকের ভাষায় লেখার চেষ্টা করব। ধর তোমার set-টার নাম হল S. তুমি প্রথমে আঙুলটা S-এর ডানদিকে কোনো বিন্দু a-তে রাখবে (Fig 3). তার মানে S-এর সব সংখ্যাই হবে a-র থেকে ছোটো, বা

$$\forall x \in S \quad x \leq a.$$

এই রকম যে কোনো a-কে বলে S-এর একটা upper bound.

> DEFINITION: **Upper bound**
> Let $S \subseteq \mathbb{R}$ be any set, and $a \in \mathbb{R}$ be any number. We say that a is an **upper bound** of S if
> $$\forall x \in S \quad x \leq a.$$

Example 5: $(0,1)$ set-টার একটা upper bound হল 1. আরেকটা upper bound হল 100. বস্তুতঃ 1 বা তার চেয়ে বড় যে কোনো সংখ্যাই একটা upper bound. ■

Exercise 3: কয়েকটা S আর a দেওয়া আছে। কোন কোন ক্ষেত্রে S-এর একটা upper bound হবে a?
(1) $S = \{1,2,3\}, \quad a = 4$ **(2)** $S = \{1,2,3\}, \quad a = 3$ **(3)** $S = \mathbb{N}, \quad a = 10^{1000}$ **(4)** $S = \mathbb{Q}, \quad a = 100$
(5) $S = \phi, \quad a = -3$
■

আবার supremum-এর প্রসঙ্গে ফিরে আসি। আমরা প্রথমে set-টার কোনো একটা upper bound a-তে আঙুল রাখছি, এবং তারপর আঙুলটাকে ক্রমশঃ বাঁদিকে সরাচ্ছি, যতক্ষণ না set-টাকে স্পর্শ করছি (Fig 4). তার মানে আসলে আমরা সবচেয়ে ছোটো upper bound-টা নিচ্ছি। সেটাই হল set-টার supremum. এই কারণে supremum-এর আরেক নাম হল **least upper bound.**
তার মানে ℓ যদি S-এর supremum হয় তবে দুটো জিনিস হবে--

1. ℓ হবে S-এর একটা upper bound,

2. ℓ-এর চেয়ে ছোটো কোনো সংখ্যা S-এর upper bound হবে না। লক্ষ কর যে ℓ-এর চেয়ে ছোটো যে কোনো সংখ্যাকে $\ell - \epsilon$ হিসেবে লেখা যায়, যেখানে $\epsilon > 0$. তাই আমরা লিখতে পারি

   $\forall \epsilon > 0$ $\ell - \epsilon$ সংখ্যাটা S-এর একটা upper bound নয়,

   মানে

   $\forall \epsilon > 0$ এমন অন্ততঃ একটা সংখ্যা পাব S-এর মধ্যে যেটা $\ell - \epsilon$-এর চেয়ে বড়,

   অর্থাৎ

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in S \quad x > \ell - \epsilon.$$

সুতরাং সব মিলিয়ে দাঁড়ালো--

DEFINITION: Supremum/Least upper bound

Let $S \subseteq \mathbb{R}$ be any set, and $\ell \in \mathbb{R}$ be any number. We say that ℓ is **supremum** or **least upper bound (lub)** of S if

$$\forall x \in S \quad x \leq \ell \tag{1}$$

and

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in S \quad x > \ell - \epsilon. \tag{2}$$

একইভাবে আমরা infimum-এর সংজ্ঞা লিখতে পারি--

DEFINITION: Infimum/Greatest lower bound

Let $S \subseteq \mathbb{R}$ be any set, and $\ell \in \mathbb{R}$ be any number. We say that ℓ is **infimum** or **greatest lower bound (glb)** of S if

$$\forall x \in S \quad x \geq \ell$$

and

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in S \quad x < \ell + \epsilon.$$

Example 6: Find $\sup A$ and $\inf A$ where

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 3x^2 + 8x - 3 < 0\}.$$

[3] **(2012.1b)**

SOLUTION: প্রথমে বুঝে নিই A-র মধ্যে কি কি সংখ্যা আছে।

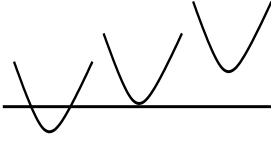
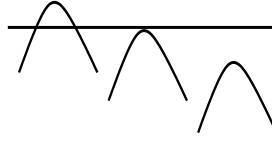
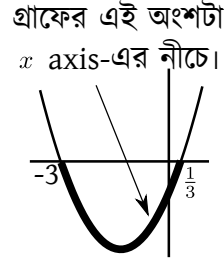



Fig 5 **Fig 6** **Fig 7**

> Factorising,
>
> $$3x^2 + 8x - 3 = (3x - 1)(x + 3) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 3).$$
>
> So
>
> $$\begin{aligned} 3x^2 + 8x - 3 < 0 \quad &\iff \quad \left(x - \frac{1}{3}\right)(x - (-3)) < 0 \\ &\iff \quad x \in \left(-3, \tfrac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

এটা কি করলাম বোঝা যাক। কায়দাটা অন্য অনেক জায়গাতেও কাজে লাগবে। জিনিসটাকে দুভাবে দেখা যায়--এক, ছবি দিয়ে, আর দুই, algebra দিয়ে। প্রথমে ছবি দিয়ে ভাবি। $3x^2 + 8x - 3$ হল একটা quadratic (দ্বিঘাত)। একটা quadratic-এর গ্রাফ সর্বদা একটা parabola-র হয়। Fig 5 আর Fig 6-তে অনেকগুলো উদাহরণ রয়েছে। যদি x^2-এর coefficient-টা > 0 হয় তবে parabola-টা উপর দিকে দুহাত তুলে থাকবে (Fig 5), নইলে হাতদুটো নীচের দিকে ঝুলবে (Fig 6)। আমাদের উদাহরণে x^2-এর আগে $3 > 0$ আছে, তাই Fig 5-এর কোনোটার মত হবে গ্রাফটা। Quadratic-টার কত গুলো distinct (আলাদা আলাদা) real root আছে তার উপর নির্ভর করবে parabola-টা কতবার x-axis-কে ছেদ বা স্পর্শ করবে। যদি দুটো distinct real root থাকে, তবে হবে Fig 5-র প্রথম ছবিটার মত। যদি খালি একটাই real root থাকে (মানে $b^2 - 4ac = 0$ হয়), তবে পাবে দ্বিতীয় ছবিটা। আর $b^2 - 4ac < 0$ হলে একটাও real root থাকবে না, তখন ছবিটা দাঁড়াবে তৃতীয়টার মত। আমাদের বেলায় দুটো real root আছে সুতরাং প্রথম ছবিটার মত হবে। আমাদের দেখতে হবে কখন $3x^2 + 8x - 3 < 0$ হয়, মানে গ্রাফটা কখন x-axis-এর নীচে থাকে। উত্তরটা দেখাই যাচ্ছে--যখন x দুটো root-এর মাঝখানে থাকবে (Fig 7)। এত কথা পড়তে যত সময় গেল, মনে মনে ধাঁ করে ভেবে ফেলতে তার চেয়ে অনেক কম সময় লাগবে।

একই জিনিস algebra দিয়েও ভাবা যেত। এখানে আমাদের দরকার $\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 3) < 0$. দুটো সংখ্যার গুণফল কখন < 0 হয়? যখন ওদের মধ্যে একজন < 0 এবং অন্যজন > 0 হয়। এমন কি হতে পারে যে $\left(x - \frac{1}{3}\right) < 0$ কিন্তু $x + 3 > 0$? অবশ্যই পারে, যখন $-3 < x < \frac{1}{3}$. কিন্তু উল্টোটাও কি হতে পারে, মানে $\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0$ আর $x + 3 < 0$? না, এটা অসম্ভব, x কি করে একইসাথে < -3 এবং $> \frac{1}{3}$ হয়? সুতরাং algebra থেকেও একই উত্তর পেলাম $x \in \left(-3, \frac{1}{3}\right)$.

এবার আমাদের অংকের পরবর্তী অংশে ফিরে আসি। আমরা পেয়ে গিয়েছি--

> So $A = \left(-3, \frac{1}{3}\right)$.

সুতরাং অমনি তুমি লাফিয়ে উঠে বলবে যে $\inf(A) = -3$ আর $\sup(A) = \frac{1}{3}$. ঠিক কথা। কিন্তু খালি লাফিয়ে উঠলেই তো হবে না, প্রমাণ করে দেখাতে হবে!

Shall show that $\inf(A) = -3$, ie,

- $\forall a \in A \quad a \geq -3$ (already shown)

- $\forall \epsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad a < -3 + \epsilon$.

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

আমাদের কাজ হল A-র মধ্যে $-3+\epsilon$-এর চেয়ে ছোটো একটা সংখ্যা a আছে দেখানো। যেহেতু $a \in A$ চাই, তাই $a > -3$ হতেই হবে। সুতরাং -3 আর $-3+\epsilon$-এর মাঝামাঝি কিছু নেব, ধরো ঠিক মাঝখানের সংখ্যাটাই নিলাম, মানে $-3 + \frac{\epsilon}{2}$. সমস্যা হল কাজটা করতে হবে $\forall \epsilon > 0$. যদি ϵ-টা খুব বড় কিছু হয়ে যায় (যেমন $\epsilon = 100$ তবে $a = -3 + \frac{\epsilon}{2}$-টা A-র বাইরে চলে যাবে। যাতে $a \in A$ থাকে, তার জন্য A-র মধ্যে কোনো একটা সংখ্যা নাও, ধরো $\frac{1}{6}$. এবার a নাও এইভাবে--

$\boxed{\exists a}$ Choose $a = \min\left\{-3 + \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{6}\right\} \in A$.

Then $a \leq -3 + \frac{\epsilon}{2} < -3 + \epsilon$, as required.

ঠিক একইভাবে দেখাব যে $\sup(A) = \frac{1}{3}$.

Shall show that $\sup(A) = \frac{1}{3}$, ie,

- $\forall a \in A \quad a \leq \frac{1}{3}$ (already shown)

- $\forall \epsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad a > \frac{1}{3} - \epsilon$.

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

$\boxed{\exists a}$ Choose $a = \max\left\{\frac{1}{3} - \frac{\epsilon}{2}, -2\right\} \in A$.

Then $a \geq \frac{1}{3} - \frac{\epsilon}{2} > \frac{1}{3} - \epsilon$, as required.

■

1.3 Existence of supremum

যেসব set-এর কোনো upper bound থাকে না, তাদের বলে unbounded above. এরা একেবারে ∞ পর্যন্ত বিস্তৃত হয়, যেমন $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ বা $(2, \infty)$. এই রকম set-এর supremum থাকে না। কেন থাকে না বুঝতেই পারছ--unbounded above হলে কোনো upper bound-ই পাবে না, ফলে আঙুলটা কোথায় রেখে শুরু করবে?

আরেকটা set-এরও supremum থাকে না, সে হল ϕ. কারণ ϕ-এর বেলায় আঙুলটা বাঁদিকে যতই সরাও কোনো দিনই আটকাবে না। আসলে ϕ তো বেমালুম ফাঁকা, কিসে আর আটকাবে?

এই দুই ধরণের set-কে বাদ দিলে বাকী সব set-এর ক্ষেত্রেই supremum থাকতে বাধ্য। এই কথাটাকে বলে **completeness axiom** বা **supremum axiom** বা **least upper bound axiom.** কথাটা শুনতে মামূলী লাগতে পারে, কিন্তু এর অপরিসীম গুরুত্ব। সেই প্রসঙ্গে আমরা একটু পরেই আসছি।

Example 7: State the least upper bound axiom for the set of real numbers.[1] **(1997,2001,2003,2005,2009,201**

SOLUTION:

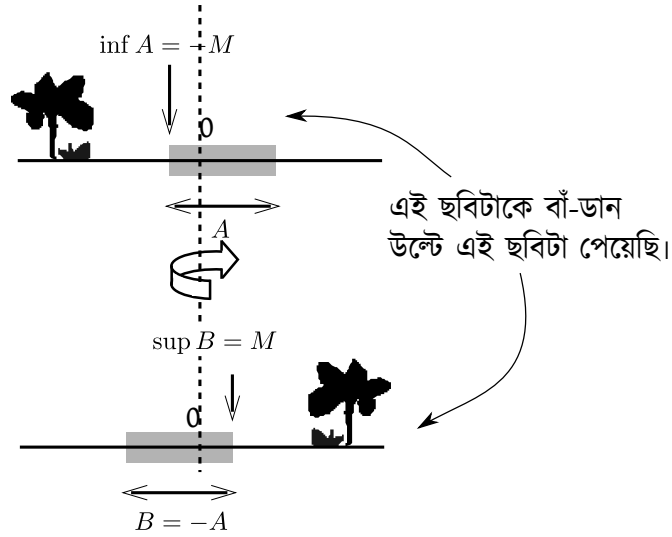



Fig 8

Least upper bound axiom
If $A \subseteq \mathbb{R}$ is nonempty and bounded from above, then A has a supremum in $\mathbb{R}$.

এখানে একটা ছোট্টো কথা বলে রাখি-- আমরা কিন্তু খালি □□A has a supremum." না লিখে লিখেছি □□A has a supremum in $\mathbb{R}$." ওই শেষের "in $\mathbb{R}$"-টুকু না লিখলে মনে হত যেন supremum-টা A-র ভিতরেই থাকবে। কিন্তু সেটা ঠিক নয়, যেমন $(0,1)$-এর supremum হল 1, কিন্তু $1 \notin (0,1)$. ■

Exercise 4: State the completeness axiom of $\mathbb{R}$.[1] **(2011)**
HINT:
আগের প্রশ্নটাই। ■

Supremum-এর জন্য একটা axiom আছে। Infimum-এর জন্য নেই? না, কারণ supremum-এর axiom-টা থেকেই আমরা infimum-এর অস্তিত্বও পেয়ে যেতে পারি। সেটাই নীচের অংকে চাওয়া হয়েছে।

Example 8: Using the Least Upper Bound axiom, show that a nonempty set of real numbers, which is bounded below, has a greatest lower bound.[3] **(2001,2008,2011)**
SOLUTION: প্রথমে সব কিছুর নাম দিয়ে নিই।

Let $A \subseteq \mathbb{R}$ be such that

1. $A \neq \phi$, and

2. A is bounded below, *i.e.*,

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \geq L.$$

আমাদের দেখাতে হবে যে A-র infimum আছে। তার জন্য আমরা প্রথমে A-কে উল্টে নেব, 0-র বাঁদিকের point-গুলোকে ডানদিকে, আর ডানদিকের point-গুলোকে বাঁদিকে নিয়ে যাব (Fig 8). তার ফলে যে set-টা পাব তার নাম দিই B.

Define $B = \{-a \ : \ a \in A\}$.

লক্ষ কর যে $b \in B$ হলে $-b \in A$ হবে। তাহলে B-এর ক্ষেত্রে supremum axiom-এর শর্ত দুটো খাটবে, কারণ A ছিল bounded below, তাই সেটা উল্টে B হবে bounded above. আর $A \neq \phi$ বলে $B \neq \phi$ হবে। এবার B-র supremum-টাকে উল্টে নিলেই A-র infimum পাওয়া যাবে।

$\because A \neq \phi \quad \therefore B \neq \phi$.

$\because A$ is bounded below by L,

$\therefore B$ is bounded above by $-L$.

এটা যে হবেই সেটা বোঝাই যাচ্ছে, তাও চাইলে অতি সংক্ষেপে কারণটা লিখে দিতে পারো--

[[Because:

$$b \in B \implies -b \in A \implies -b \geq L \implies b \leq -L.$$

]]

এবার B-এর উপর least upper bound axiom লাগাব--

So by the Least Upper Bound axiom, B has a least upper bound $M \in \mathbb{R}$, say.

Thus,

1. $\forall b \in B \ \ b \leq M$.
2. $\forall \epsilon > 0 \ \exists b \in B \quad b > M - \epsilon$.

যেহেতু $M = \sup B$ তাই নিশ্চয়ই $-M = \inf A$ হবে। এবার এটাই দেখাব।

Shall show: $-M = \inf A$, i.e,

(1) $\forall a \in A \quad a \geq -M$.

[[Because:

$\boxed{\forall a}$ Take any $a \in A$.

Then $-a \in B \implies -a \leq M \implies a \geq -M$.

]]

(2) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad a < -M + \epsilon$.

■

1.4 Properties of supremum

নীচের প্রতিটি অংকেই আমাদের কাজ একটা সংখ্যাকে একটা set-এর supremum দেখানো। তার জন্য আমরা সরাসরি supremum-এর definition লাগাব। মনে রেখো যে definition-টায় দুটো শর্ত আছে, (**1**) আর (**2**). সেই কারণে উত্তরে দুটো করে ধাপ।

Example 9: Let A, B be two nonempty bounded sets of real numbers; $a = \sup(A), b = \sup(B)$.

Let
$$C = \{x + y \mid x \in A, \quad y \in B\}.$$

Show that $\sup(C) = a + b$.[3] **(1997,2008)**

SOLUTION:

To show $\sup(C) = a + b$.

দেখাতে হবে যে $a + b$ সংখ্যাটা হল C set-টার supremum. প্রথম ধাপে আমরা definition-এর (**1**) প্রমাণ করব। (**1**)-এর S-এর জায়গায় C, আর ℓ-এর জায়গায় $a + b$ বসালে হয়--

Step 1: Shall show

$\forall z \in C \quad z \le a + b.$

এই জায়গাটায় অনেকে $\forall x + y \in C$ লিখে ফেলে। সেটা অংকের ব্যাকরণসম্মত নয়। $\forall$ বা $\exists$-এর পরে কখনও কোনো ফর্মুলা বসে না।

প্রথমে $\forall z \in C$ আছে, তাই--

$\because x \le a$ and $y \le b$,

$\therefore z = x + y \le a + b.$

এবার দ্বিতীয় ধাপ। (**2**)-এ S-এর জায়গায় C, আর ℓ-এর জায়গায় $a + b$ লিখে পাই--

$\forall \epsilon > 0$ দিয়ে শুরু, তাই--

■

Exercise 5: Let S and T be two non-empty subsets of $\mathbb{R}$ and

$$U = \{x + y \ : \ x \in S, \ y \in T\}.$$

Prove that $\inf U = \inf S + \inf T$.[3] **(2011.3a)**
HINT:
একেবারেই আগের অংকটার মত, খালি sup-এর জায়গায় inf. ■

আরো একটা একই রকমের অংক, এবার sup আর inf মিশিয়ে।

Exercise 6: Let S and T be two bounded sets of real numbers and

$$X = \{a - b \ : \ a \in S, \ b \in T\}.$$

Prove that $\sup X = \sup S - \inf T$.[3] **(2013.1b)**
HINT:
যেকোনো $x \in X$ নাও, তবে x-কে এভাবে লিখতে পারবে--$x = a - b$ যেখানে $a \in A, b \in B$. $\therefore a \leq \sup S$ আর $b \geq \inf T$. সুতরাং $x = a - b \leq \sup S - \inf T$.
এবার যে কোনো $\epsilon > 0$ নাও। তবে এমন $s \in S$ আর $t \in T$ পাবে যাতে $s > \sup S - \frac{\epsilon}{2}$ আর $t < \inf T + \frac{\epsilon}{2}$ হয়। সুতরাং $s - t$ হবে X-এর এমন একটা element যেটা $> \sup S - \inf T - \epsilon$. এবার গুছিয়ে লেখার দায়িত্ব তোমার। ■

Example 10: Let S and T be two nonvoid, bounded above subsets of $\mathbb{R}$. Show that

$$\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}.$$

[3] **(2009)**
SOLUTION: Nonvoid মানে nonempty.

> $S, T \subseteq \mathbb{R}$ nonempty, bounded above. So they have suprema $s, t \in \mathbb{R}$, respectively, say.

"suprema" হল "supremum"-এর বহুবচন।

> To show $\sup(S \cup T) = \max\{s, t\} = u$, say.

প্রথম ধাপে সংজ্ঞার $(\mathbf{1})$ প্রমাণ করব--

> Step 1: Shall show that
>
> $\forall x \in S \cup T \quad x \leq u$.
>
> Take any $x \in S \cup T$.
>
> Then either $x \in S$ or $x \in T$.
>
> So either $x \leq s$ or $x \leq t$.
>
> So $x \leq \max\{s, t\} = u$, as required.

দ্বিতীয় ধাপে প্রমাণ করব সংজ্ঞার $(\mathbf{2})$.

> Step 2: Shall show that
>
> $\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in S \cup T \quad x > u - \epsilon$.
>
> Take any $\epsilon > 0$.

এবার দুটো কেসে ভেঙে নেব।

> Case 1: If $s \geq t$ then $u = s$.
>
> So $u - \epsilon < s$
>
> $\because s = \sup S, \therefore \exists x \in S$ with $x > s - \epsilon$.
>
> $\exists x$ Choose this x.
>
> So $x \in S \cup T$ and $x > u - \epsilon$, as required.

দ্বিতীয় কেসটাও একইরকম।

> Case 2: If $s < t$ then $u = t$.
>
> So $u - \epsilon < t$
>
> $\because t = \sup T, \therefore \exists x \in T$ with $x > t - \epsilon$.
>
> $\exists x$ Choose this x.
>
> So $x \in S \cup T$ and $x > u - \epsilon$, as required.

অতএব দুটো কেস মিলিয়ে সিদ্ধান্ত--

So

$$\sup(S \cup T) = \max\{s, t\},$$

as required.

■

Exercise 7: আগের অংকটা ছিল supremum নিয়ে। যদি infimum নিয়ে একইরকম অংক বানাতে চাই তবে সেটা কিরকম হবে? ■

Example 11: Let T be a bounded subset of $\mathbb{R}$. If $S = \{|x - y| : x, y \in T\}$ show that $\sup S = \sup T - \inf T$.[3] **(1999)**

SOLUTION: এখানে অবশ্যই ধরে নিতে হবে যে T একটা nonempty set, নইলে আর তার sup বা inf হয় কি করে!

We assume that $T \neq \phi$.

Let $a = \inf T$ and $b = \sup T$, which exist $\because T \neq \phi$ and bounded.

To show $\sup S = b - a$.

Step 1: Shall show

$\forall s \in S \quad s \leq b - a.$

$\because T \neq \phi, \therefore S \neq \phi.$

Take any $s \in S$. Then $s = |x - y|$ for some $x, y \in T$.

এখানে কেন আগে বলে নিলাম "$S \neq \phi$" সেটা নিশ্চয়ই বুঝেছ, কারণ নইলে S থেকে s নিতে পারতাম না।

$$\therefore s = |x - y| = \max\{x, y\} - \min\{x, y\} \leq b - a,$$

since $\max\{x, y\} \leq b$ and $\min\{x, y\} \geq a$.

এখানে আমরা এই কথাটা ব্যবহার করলাম যে, দুটো সংখ্যা x, y-এর মধ্যে দূরত্ব মানে বড়টার থেকে ছোটটার বিয়োগফল। যেহেতু x, y দুজনেই b-এর চেয়ে ছোট, তাই ওদের মধ্যে বড়টাও b-এর চেয়ে ছোটো। একইভাবে ওরা দুজনেই a-র থেকে বড় বলে ওদের minimum-টাও a-র থেকে বড়।

Step 2: Shall show

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists s \in S \quad s > b - a - \epsilon.$

Take any $\epsilon > 0$.

$\because b = \sup T,$

$\therefore \exists x \in T$ with $x > b - \frac{\epsilon}{2}$.

Similarly, $\because a = \inf T,$

$\therefore \exists y \in T$ with $y < a + \frac{\epsilon}{2}$.

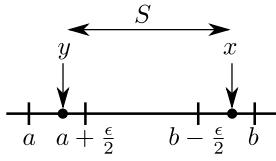
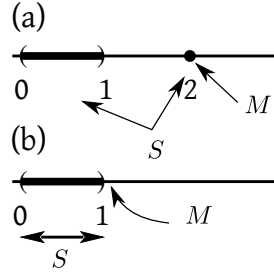
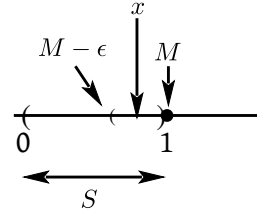



Fig 9 Fig 10 Fig 11

$\boxed{\exists s}$ Choose $s = |x-y|$.

Fig 9 দ্যাখো।

■

Example 12: Let S be a nonempty set of $\mathbb{R}$ bounded above and $M = \sup S$. If $M \notin S$, prove that M is a limit point of S.[2] **(2004,2012)**

SOLUTION: অংকটা শুরু করার আগে বোঝা যাক ব্যাপারটা কি হচ্ছে। ধর $S = (0,1) \cup \{2\}$ নিলাম। তাহলে $M = \sup(S) = 2$. এখানে এই M-টা S-এর ভিতরে রয়েছে (যেহেতু $2 \in S$). M কি এক্ষেত্রে S-এর একটা limit point? না, কারণ Fig 10(a)-তে দ্যাখা যাচ্ছে যে 2 রয়েছে S-এর বাকী point-দের ভীড় থেকে কিছুটা দূরে। তার মানে sup হলেই যে limit point হবে এমন কোনো কথা নেই।

এবার Fig 10(b)-এর দিকে চোখ ফেরাও। এখানে $S = (0,1)$ তাই $M = \sup S = 1$. এই M-টা কিন্তু S-এর বাইরে, এবং এক্ষেত্রে M-টা S-এর একটা limit point-ও বটে! এটা যে কোনো কাকতালীয় ঘটনা নয়, এই অংকের উপজীব্য বিষয় সেটাই। যখনই একটা set-এর sup থাকবে set-টার বাইরে, তখনই সেটা set-টার limit point হতে বাধ্য।

যেহেতু প্রথমেই $\forall \epsilon > 0$ আছে তাই--

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

মনে রেখো যে আমাদের উদ্দেশ্য হল এমন একটা x বার করা যেটা $N'(M,\epsilon)$ এবং S দুটোতেই আছে। কারণ তাহলেই প্রমাণ হবে যে $N'(M,\epsilon) \cap S \neq \phi$.

$\because M = \sup(S)$,

$\therefore \exists x \in S \quad x > M - \epsilon$.

$\boxed{\exists x}$ Choose this x.

এই x-টা তো S-এর মধ্যে আছেই। আমরা দেখাব যে এটা $N'(M,\epsilon)$-এর মধ্যেও আছে (Fig 11).

> Now $x \leq M$ since M is an upper bound of S.
> Also, $x \neq M$, since $M \notin S$.
> Also $x > M - \epsilon$.
> $\therefore x \in (M - \epsilon, M) \subseteq N'(M, \epsilon)$.
> $\therefore x \in E \cap N'(M, \epsilon) \because x \in S$.
> $\therefore S \cap N'(M, \epsilon) \neq \phi$, as required.

■

Exercise 8: Let $A \subseteq \mathbb{R}$ and $\ell = \sup(A)$. Show that ℓ must be a boundary point of A. ■

Example 13: Let S be a set of monotonically increasing functions defined over closed interval $[a, b]$ and let $h(x) = \sup_{f \in S}\{f(x) | x \in [a, b]\}$ be a finite number. Show that h is a monotonically increasing function.[3] **(2003)**
SOLUTION: এখানে একটা নতুন কথা রয়েছে--monotonically increasing. কোনো f(x)-কে monotonically increasing বলা মানে, x বাড়লেই $f(x)$-ও বাড়ে (বা সমান থাকে)। যেমন x বয়সে তোমার উচ্চতা যদি $f(x)$ হয় তবে $f(x)$ অতি অবশ্যই একটা monotonically increasing function হবে। কারণ তুমি তো আর বয়স বাড়ার সঙ্গে বেঁটে হয়ে যেতে পারো না!
2003 সালের এই প্রশ্নটায় একটা বিশ্রী ভুল ছাপানো আছে। লিখেছে যে

$$h(x) = \sup_{f \in S}\{f(x) | x \in [a, b]\},$$

যেন supremum-টা নেওয়া হয়েছে $f \in S$ এবং $x \in [a, b]$ দুয়েরই উপরে। কিন্তু $x \in [a, b]$-এর উপরে supremum নিলে তো আর সেই supremum-টা কোনো একটা বিশেষ x-এর উপর নির্ভর করতে পারে না। অতএব সেটা আর $h(x)$ হয় কি করে! আসলে এখানে বলতে চেয়েছে যে প্রতিটা x-এর জন্য আলাদা করে $f \in S$-এর উপরে supremum নেওয়া হচ্ছে--

> We should take $\forall x \in [a, b]$
>
> $$h(x) = \sup_{f \in S} f(x),$$
>
> which is assumed finite.

Fig 12

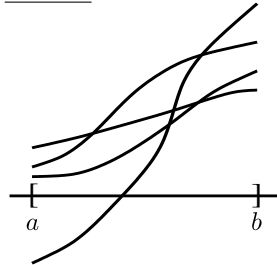



Fig 13

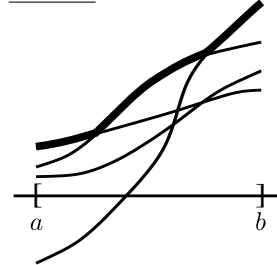
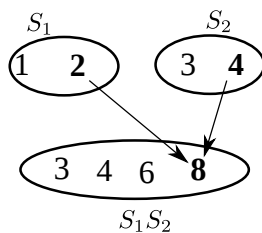
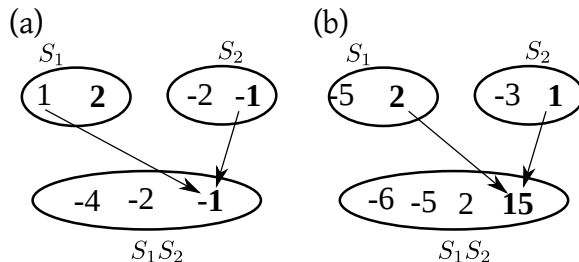



Fig 14 **Fig 15**

Fig 12-এ এক গুচ্ছ monotonically increasing function রয়েছে। এদের supremum নিয়ে পেয়েছি Fig 13-এর $h(x)$. এবার দেখাব যে এই $h(x)$-টা monotonically increasing, অর্থাৎ $x < y$ হলে $h(x) \le h(y)$ হবে।

$\forall x, y \in [a, b] \quad (\ x < y \implies h(x) \le h(y)\ ).$

Take any $x, y \in [a, b]$ with $x < y$.

প্রমাণটা আসলে supremum-এর definition লাগানো ছাড়া আর কিছুই নয়।

By definition, the number $h(y)$ is an upper bound of $\{f(y) \ : \ f \in S\}$.

Since $\forall f \in S \ \ f(y) \ge f(x)$, hence $h(y)$ is an upper bound of $\{f(x) \ : \ f \in S\}$ also.

But $h(x)$ is the least upper bound of $\{f(x) \ : \ f \in S\}$.

So $h(x) \le h(y)$, as required.

■

Example 14: If S_1 and S_2 are two non-empty bounded subsets of real numbers, find infimum(S_1S_2) and supremum(S_1S_2), where

$$S_1S_2 = \{ab \ : \ a \in S_1, b \in S_2\}.$$

[2] **(2010.1b)**

SOLUTION: প্রথমে একটা উদাহরণ দিয়ে বুঝি যে, S_1S_2 জিনিসটা ঠিক কি। ধর, $S_1 = \{1, 2\}$ আর $S_2 = \{3, 4\}$. তাহলে S_1-এর সবার সঙ্গে S_2-র সবাইকে গুণ করলে যে সব সংখ্যা পাব তাদের set-টাই হল S_1S_2, অর্থাৎ--

$$S_1S_2 = \{1 \times 3, \quad 1 \times 4, \quad 2 \times 3, \quad 2 \times 4\} = \{3, 4, 6, 8\}.$$

এর মধ্যে maximum হল 8, যেটা S_1-এর maximum আর S_2-র maximum গুণ করে পাওয়া (Fig 14). এ থেকে ফস্ করে মনে হতে পারে যে, যে কোনো S_1, S_2-র ক্ষেত্রেই $\sup(S_1S_2) = \sup(S_1)\sup(S_2)$. কিন্তু Fig 15-এর উদাহরণগুলো দেখলেই বুঝবে যে, $\sup(S_1S_2)$ বার করতে কখনো কখনও inf-গুলোও ব্যবহার করতে হবে। একই কথা খাটে $\inf(S_1S_2)$-এর ক্ষেত্রেও। সব মিলিয়ে সংক্ষেপে লিখতে পারি এইভাবে--

$\because S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}$ are bounded, non-empty,

$\therefore m_i = \inf S_i$ and $M_i = \sup S_i$ exist in $\mathbb{R}$ for $i = 1, 2$.

Let

$$A = \{m_1 m_2, \quad m_1 M_2, \quad M_1 m_2, \quad M_1 M_2\}.$$

Then

$$\inf(S_1 S_2) = \min A \text{ and } \sup(S_1 S_2) = \max A.$$

এই কথাটা যদি প্রমাণ করতে যাই তবে কেসে ভেঙে ভেঙে করতে হবে। অনেকগুলো কেস হবে, তাই আর বিশদ প্রমাণের মধ্যে গেলাম না। ■

DAY 2
Introduction to axioms

এ বইতে আমরা real analysis শিখছি এবং real analysis কাজ করে real number নিয়ে। সুতরাং real number বলতে ঠিক বোঝায় সেটা ভালো করে জেনে রাখা ভালো। আমরা দ্বিতীয় অধ্যায়ে real number-এর একটা কাজ চলা গোছের সংজ্ঞা দিয়েছিলাম। সেইটা আরেকবার মনে করি--

- প্রথমে বলেছিলাম $\mathbb{N}$ হল $1, 2, 3, \ldots$ ইত্যাদি positive integer-দের set. তার মানে $\mathbb{N}$-এর মধ্যে 1 আছে এবং তার পর থেকে এক-এক করে বাড়িয়ে যত সংখ্যা হয় সব আছে। এক কথায় বললে-- n থাকলেই $n+1$-ও আছে।
- তারপর এল $\mathbb{Z}$-এর সংজ্ঞা, এখানে $\mathbb{N}$ তো আছেই, আরো আছে 0 এবং সব negative integer-রা।
- তার পর এল $\mathbb{Q}$, যেটা তৈরী সব p/q জাতীয় সংখ্যা দিয়ে, যেখানে p, q হল integer এবং $q \neq 0$.

এই অবধি সহজ ছিল। কিন্তু এর পরের ধাপেই হল সমস্যা। Pythagoras দেখিয়েছিলেন যে $\mathbb{R}$-এর ভিতরে $\sqrt{2}$ আছে, যেটা $\mathbb{Q}$-তে নেই, তার মানে $\mathbb{R}$ হল $\mathbb{Q}$-এর চেয়ে বড় set. কিন্তু $\mathbb{Q}$-এর বাইরে ঠিক কি কি নতুন জিনিস আছে $\mathbb{R}$-এর মধ্যে? $\sqrt{2}$ আছে, এবং একইভাবে $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ ইত্যাদি যাবতীয় square root-রাও আছে। আর আছে cube root, 4-th root, ... ইত্যাদি সব root-গুলো। কিন্তু এখানেই শেষ নয়। Root ছাড়া আরো অনেক বিদঘুটে জিনিসও আছে $\mathbb{R}$-এর মধ্যে যেমন π, e বা তাদের মিলিয়ে তৈরী π^e. কিন্তু এই ভাবে তো সব কিছু ধরে ধরে লিস্ট বানানো যায় না। একটা প্যাটার্ণ থাকলে বলতে পারতাম যে $\mathbb{R}$ হল এই রকম প্যাটার্ণের সব সংখ্যার set, যেমন $\mathbb{Q}$-এর বেলায় প্যাটার্ণটা ছিল p/q.
শুনলে আশ্চর্য হবে যে $\mathbb{R}$-এর জন্য এরকম প্যাটার্ণ আজও পর্যন্ত কেউ বের করতে পারে নি! তাহলে কি করে আমরা real number-এর সংজ্ঞা লিখব অংকের ভাষায়? এই সমস্যার একটা চমৎকার সমাধান করা হয়েছে, কি ভাবে সেটা বলি।
"অংকের ভাষা" জিনিসটা সূক্ষ্ম অংকের পক্ষে খুব দরকারী ঠিকই, কিন্তু প্রতিদিনের জীবনে ওটা ছাড়াই দিব্যি কাজ চলে। সুতরাং real number নিয়ে অংক করার জন্য একটা কাজ-চলা সংজ্ঞা থাকলেই প্রচুর কাজ করা যায়। এরকম একটা কাজ চলা সংজ্ঞার কথা গ্রীকদের আমল থেকেই জানা ছিল, সেটা হল $\mathbb{R}$-কে একটা মস্ত লম্বা লাইন হিসেবে কল্পনা করা। তার প্রতিটা বিন্দু হল একটা real number. এই কাজ-চলা-গোছের সংজ্ঞার উদ্ভব হয়েছিল জমি মাপতে গিয়ে। এই কাজ-চলা গোছের সংজ্ঞা থেকে মানুষ real number-এর নানা রকম বৈশিষ্ট্য দেখেছে, যেমন ধর যদি মাটিতে একটা লাইন টানি, তবে সেটাকে আমরা সমান তিন ভাগে ভাগ করতে পারি। এ থেকে সিদ্ধান্ত যে, কোনো real number-কে 3 দিয়ে ভাগ করলে আরেকটা real number পাওয়া যায়।
এই বার এরকম যত কাজ-চলা গোছের তথ্য জানা ছিল সব কিছুর একটা স্তূপ করা হল। না, এই বিশালস্তূপটা একদিনে হয় নি, বহু শতাব্দী ধরে তিলে তিলে গড়ে উঠেছিল। যাদের অবদানে এই স্তূপের সৃষ্টি তাদের অধিকাংশই কিন্তু গণিতজ্ঞ ছিল না, ছিল নিতান্ত সাধারণ মানুষ, যারা প্রতিদিনকার জীবনের প্রয়োজনে অংক ব্যবহার করতে গিয়ে এই সব তথ্য ব্যবহার করত।
এবার পণ্ডিতেরা বললেন real number-এর যখন কোনো প্যাটার্ণ পাওয়া যাচ্ছে না, তখন আমরা এইভাবে তার সংজ্ঞা দেব--real number হল সেই সব সংখ্যা যাদের জন্য এই যাবতীয় অভিজ্ঞতালব্ধ তথ্যগুলো খাটে। সেটা একটা সংজ্ঞা হল

বটে, কিন্তু কার্যকালে ব্যবহারের পক্ষে সহজ হল না, কারণ এরকম তথ্যের সংখ্যা অ--নে--ক! তাদেরকে সব লিখতে গেলে দশটা মহাভারত হয়ে যাবে। তখন পণ্ডিতেরা বললেন আচ্ছা, এতগুলো তথ্যের মধ্যে সবগুলোই কি দরকারী, বাড়তি কিছুই কি নেই, যেগুলোকে বাদ দেওয়া যায়? যেমন ধর $2+3=5$ আবার $5+4=9$. সুতরাং সেক্ষেত্রে আর আলাদা করে $2+3+4=9$ তথ্যটার দরকার পড়ে না। বহুশতাব্দীব্যাপী অভিজ্ঞতার সুবিশাল তথ্যভাণ্ডার থেকে এইভাবে মূল তথ্যগুলোকে ছেঁকে বার করা খুবই কঠিন কাজ। কিন্তু মানুষ সেই অসাধ্য সাধন করেছে, এবং (বললে বিশ্বাস করবে না!) সব কিছু কেটেছেঁটে মূল তথ্যের সংখ্যা দাঁড়িয়েছে মাত্র আট!! অর্থাৎ এই আটটা তথ্য (এদের বলে **axiom**) এমন যাতে--

1. এদের সত্যতা মেনে নিতে আমাদের কারোরই কোনো আপত্তি না থাকে (এতই সহজ!)

2. $\mathbb{R}$ নিয়ে বাকী যত তথ্য আছে সব কিছু এই আটটাকে মিলিয়েজুলিয়ে তৈরী করা যায়।

এই বার পণ্ডিতেরা অংকের ভাষায় $\mathbb{R}$-এর definition দিলেন এই বলে যে, $\mathbb{R}$ হল একটা set যার সংখ্যাগুলোকে যোগ এবং গুণ করা যায় (অর্থাৎ $a, b \in \mathbb{R}$ হলে $a+b$ এবং ab এই দুটোও $\mathbb{R}$-এর মধ্যেই থাকে), এবং যার জন্য এই আটটা axiom খাটে--

1. **Associativity:**
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a+b)+c = a+(b+c) \text{ and } (ab)c = a(bc)$$

2. **Commutativity:**
$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a+b = b+a \text{ and } ab = ba.$$

3. **Identities:** There are two *distinct* elements 0 and 1 in $\mathbb{R}$ such that
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad a+0 = a \text{ and } 1a = a.$$

4. **Negatives:**
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad a+b = 0.$$
This b is called **negative** of a and is denoted by $-a$.

5. **Reciprocal:**
$$\forall a \neq 0 \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad ab = 1.$$
This b is called **reciprocal** of a and is denoted by $1/a$ or a^{-1}.

6. **Distributivity:**
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a(b+c) = ab+ac.$$

7. There is a subset $P \subseteq \mathbb{R}$ (called the set of **positive numbers**) such that
   - $\forall a \in \mathbb{R}$ exactly one of the following is true: either $a = 0$ or $a \in P$ or $-a \in P$.
   - $\forall a, b \in P \quad a+b \in P$ and $ab \in P$.

8. **Completeness axiom:** If $A \subseteq \mathbb{R}$ is a nonempty set bounded from above, then A has a supremum in $\mathbb{R}$.

আমরা বলেছি যে এই আটটা axiom থেকে $\mathbb{R}$-এর সবকিছুই প্রমাণ করা যায়। প্রমাণ করতে পারো যে যদি $a \in \mathbb{R}$ হয় তবে $a \times 0 = 0$? শুনে তুমি বলবে, এটা আবার প্রমাণ করব কি, এ তো দেখাই যাচ্ছে যে! এই যে তুমি বললে "এ তো দেখাই যাচ্ছে!" এই কথাটার মধ্যে একটু সমস্যা আছে। যে জিনিসটা সাদা চোখে দেখে ঠিক মনে হয়, সেটা অনেক সময়েই ঠিক হয় না। যেমন Pythagoras-এর আগে গ্রীকরা বিশ্বাস করত যে সব সংখ্যাই $\frac{p}{q}$ আকারের, কারণ সাদা চোখে দেখলে মনে হয় যে সত্যিই যে কোনো দৈর্ঘ্যকে যথেষ্ট সূক্ষ্ম স্কেল দিয়ে মেপে ফেলা যায়। সেই বিষয়ে ঘুণাক্ষরেও কারো মনে কোনো সন্দেহ ছিল না। অথচ দ্যাখো, কথাটা মোটেই ঠিক ছিল না। এটা ছাড়া আরও একটা সমস্যা আছে। ধর কোনো মাস্টারমশাই তোমাকে কিছু একটা অংক বোঝাচ্ছেন। অংকটা তোমার কাছে বেজায় খটমট ঠেকছে, কিচ্ছু বোঝা যাচ্ছে না, কিন্তু মাস্টারমশাই পণ্ডিত মানুষ, তিনি একধাপে উত্তরটা লিখে বলছেন "এ তো দেখাই যাচ্ছে!" সমস্যা হল যে তুমি মোটেই দেখতে পাচ্ছ না। সুতরাং মাস্টারমশায় তোমার উপর চটে উঠছেন, এবং তুমিও খুব একটা খুশী হচ্ছ না। আগেকার দিনে ঠিক এই ঘটনাটাই আরও গুরুতর রূপ নিত যখন দুই পণ্ডিতে ঝগড়া বাঁধত। দুজনেই দুটো যুক্তি উপস্থাপিত করতেন, দুজনেরই দাবী যে তাঁর যুক্তির সত্যতা "দেখাই যাচ্ছে!" কিন্তু এদিকে দুজনে পরস্পরের বিপরীত কথা বলছেন। এই রকম ঘটনা অংকের ইতিহাসে এতবার হয়েছে যে, শেষটায় পণ্ডিতেরা বিরক্ত হয়ে বললেন যে, সেই সব তথ্যের একটা তালিকা বানানো যাক যাদের সত্যতা নিয়ে কারো কোনো আপত্তি নেই। সেক্ষেত্রে তর্কের সময়ে কেবল এই তথ্যগুলোকে সালিশী মানা হবে, এই তালিকাটাই হল আমাদের আটটা axiom. পৃথিবীর যে কোনো গণিতজ্ঞ এগুলোকে মেনে নিতে বাধ্য। এর বাইরে real analysis নিয়ে বিতর্ক উঠলেই সেটাকে এই axiom-গুলো দিয়ে অংকের ভাষায় প্রমাণ করে দেখাতে হবে। না পারলে সেই "যুক্তি" গণ্য হবে না।

Example 15: Axiom থেকে প্রমাণ কর যে $a \in \mathbb{R}$ হলে $a \times 0 = 0$.

SOLUTION:

Let $b = a \times 0$.

$$\begin{aligned} b &= a \times 0 \\ &= a(0+0) \quad [\because 0+0=0 \text{ by axiom 3}] \\ &= a \times 0 + a \times 0 \quad [\text{axiom 6}] \\ &= b + b \end{aligned}$$

এখন axiom 4 থেকে আমরা জানি যে $-b \in \mathbb{R}$. দুই দিকে $-b$ যোগ করে পাই--

$$\begin{aligned} (-b) + b &= (-b) + (b + b) \\ &= ((-b) + b) + b \quad [\text{axiom 1}] \\ &= 0 + b \quad [\text{axiom 4}] \\ &= b \quad [\text{axiom 3}] \end{aligned}$$

তার মানে $b = (-b) + b = 0$, অর্থাৎ $a \times 0 = 0$.

So $b = (-b) + b = 0$, as required.

■

তবে সুখের কথা এই যে $a \times 0 = 0$ হওয়া নিয়ে সাধারণতঃ লোকে বড় একটা সন্দেহ প্রকাশ করে না, নইলে কথায় কথায় যদি লোকে এরকম প্রমাণ চেয়ে বসত, তবে ব্যাপারটা ভারী বিরক্তিকর হত সন্দেহ নেই! axiom-গুলো অনেকটা মানুষের

দেহের কংকালের মত। ওটা ভিতরে আছে বলেই আমরা হাতপা নেড়ে চলে ফিরে বেড়াতে পারছি। কিন্তু কংকালটা হঠাৎ বাইরে বেরিয়ে এলে ব্যাপারটা খুব সুখকর হত না।

2.1 Applns of completeness

আমাদের পক্ষে axiom 8 (যার আরেক নাম completeness axiom বা supremum axiom বা least upper bound axiom) সেটা বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। বাকী axiom-গুলোর থেকে এটা দেখতে বেশী খটমট। বাকীগুলো আমরা ছোটোবেলা থেকেই দেখে এসেছি, কিন্তু আট নম্বরটা নতুন জিনিস। এর সাহায্যে প্রচুর জিনিস প্রমাণ করা যায়। তার নানা উদাহরণ এ বইতে পাবে। এই অধ্যায়ে আমরা এর ছয়টা প্রয়োগ শিখব।

2.1.1 Appln 1: Unboundedness of $\mathbb{N}$

Example 16: Using the least upper bound axiom show that the set of natural numbers has no upper bound.[2] **(1997,1998,2009)**

SOLUTION: "Natural number" মানে “positive integer.” কিন্তু এটাই এর মূল definition নয়। মূল definition-টা হল--

> $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ is defined as the smallest subset of $\mathbb{R}$ such that
>
> - $1 \in \mathbb{N}$, and
> - $n \in \mathbb{N} \implies n+1 \in \mathbb{N}$.

আমরা proof by contradiction করব।

> Let, if possible, $\mathbb{N}$ be bounded above.
> Now $\mathbb{N} \neq \phi (\because 1 \in \mathbb{N})$.
> So, by the completeness axiom, $\mathbb{N}$ has supremum $L \in \mathbb{R}$, say.
> $\because L = \sup(\mathbb{N})$,
> $\therefore \exists n \in \mathbb{N} \quad n > L - 1$.

এর কারণ, supremum-এর সংজ্ঞা থেকে জানি যে

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > L - \epsilon.$$

আমরা এখানে $\epsilon = 1$ নিয়েছি। কিন্তু $n \in \mathbb{N}$ হলেই তো $n+1 \in \mathbb{N}$ হতে বাধ্য--

> So $n+1 \in \mathbb{N}$.
> But $n+1 > L (\Rightarrow\Leftarrow, \because L$ is upper bound of $\mathbb{N})$.
> This contradiction proves that $\mathbb{N}$ must be unbounded above.

■

Example 17: Show that for every real x there is a positive integer n such that $n > x$.[3] **(1999)**

SOLUTION:

> To show
> $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > x.$$
> Let, if possible, this statement be false. Then
> $$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq x.$$

আমরা এটা পেয়েছি "$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > x$"-এর negation নিয়ে।

> But this means $\mathbb{N}$ is bounded above by x.

সুতরাং এটা আবার আগের অংকটাতেই পরিণত হল, অতএব আগের অংকের সমাধানটা করে গেলেই চলবে। ■

Example 18: If r is any positive real number, then show that there exists unique $n \in \mathbb{N}$ such that $n \leq r < n+1$.[2] **(2008)**
SOLUTION: অংকটা ভুল। যদি $r = \frac{1}{2}$ নিই, তবে কোনো $n \in \mathbb{N}$ পাব না, যাতে $n \leq r$ হয়। আসলে এখানে $r \geq 1$ বলা থাকা উচিত ছিল। সেক্ষেত্রে অংকটা এইভাবে করতে হত--
প্রথমে দেখাব existence,অর্থাৎ এরকম n যে আদৌ আছে।

> Existence:
> Let $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \leq r\}$.

একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে A-র মধ্যে maximum যে সংখ্যাটা সেটাই আমাদের n. কিন্তু সেই কথাটা লেখার আগে প্রমাণ করতে হবে যে A-র মধ্যে একটা maximum সংখ্যা আছে। আমরা শুরু করব supremum আছে দেখিয়ে--

> $\because r \geq 1 \ \therefore 1 \in A, \ \therefore A \neq \phi$.
> Also A is bounded above by r.
> So, by supremum axiom, $\sup(A) \in \mathbb{R}$.
> Let $\ell = \sup(A)$.

এইবার supremum থেকে maximum-এ পৌঁছব। নীচের ধাপটা খুব ভালো করে লক্ষ কর।

> $\exists n \in A \quad n > \ell - 1$.
> $\therefore n+1 > \ell, \ \therefore n+1 \notin A \ \therefore n+1 > r$.
> Hence $n \leq r < n+1$, as required.

এইবার uniqueness দেখাই, অর্থাৎ দেখাই যে এরকম n ঠিক একটাই আছে।

> Uniqueness: Let $m, n \in \mathbb{N}$ be such that
> $$m \leq r < m+1 \text{ and } n \leq r < n+1.$$
> Shall show $m = n$.
> Now both $m, n \in (r-1, r]$, and so $|m-n| < 1$.

But, since $m, n \in \mathbb{N}$, this means $m = n$, as required.

কারণ দুটো integer-এর পার্থক্য 1-এর থেকে কম হলে, তারা সমান হতে বাধ্য। ■

Exercise 9: Prove the **well ordering principle** of $\mathbb{N}$: Any nonempty subset of $\mathbb{N}$ has a minimum element. ■

2.1.2 Appln 2: Archimedean property

Example 19: State the Archimedean property of real numbers.[1] **(2000,2002,2009,2010,2013)**

SOLUTION:

Archimedean property of $\mathbb{R}$

$$\forall x > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad nx > y.$$

একটা গানে আছে "ছোট্টো ছোট্টো পায় চলতে চলতে ঠিক পৌঁছে যাব", এই Archimedean property হল সেই কথাটাই অংকের ভাষায় বলা। মনে কর তুমি খুব ছোটো ছোটো পা ফেলে হাঁটছো, প্রতিটি পদক্ষেপের দৈর্ঘ্য হল $x > 0$ আর তোমাকে যেতে হবে অ-নে-ক দূরে, ধরো y দূরত্বে, যেখানে y হয়তো খু-ব বড়। তাহলে Archimedean property বলছে যে মুষড়ে পড়ার কিছু নেই, যথেষ্ট বেশীবার (মানে n বার) পা ফেললে তুমি যে খালি পৌঁছে যাবে তা-ই নয়, y-কে টপকেও যাবে। তবে, হ্যাঁ, এই গানটা খালি $y > 0$-এর জন্যই খাটে। কিন্তু $Archimedean property$ খাটে যেকোনো $y \in \mathbb{R}$-এর জন্যই। ■

Example 20: Deduce the Archimedean property of $\mathbb{R}$ (from the least upper bound axiom of $\mathbb{R}$).[2] **(2002,2005,2009,2013)**

SOLUTION: আমরা আগের একটা অংকে দেখিয়েছিলাম যে $\mathbb{N}$ হল unbounded above. এবার দেখব যে, Archimedean property আসলে সেই কথাটাকেই একটু ঘুরিয়ে বলা।

To show

$$\forall x > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad nx > y,$$

i.e.,

$$\forall x > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > \tfrac{y}{x}.$$

আমরা এর জন্য proof by contradiction লাগাব।

Let, if possible, this be false.

Then

$$\exists x > 0 \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq \tfrac{y}{x}.$$

So, taking $r = \frac{y}{x}$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq r.$$

Thus $\mathbb{N}$ is bounded above (by r).

আমরা আগে $\mathbb{N}$-কে unbounded above দেখিয়েছিলাম contradiction ব্যবহার করে, সেভাবেই এগোব।

Now $\mathbb{N} \neq \phi (\because 1 \in \mathbb{N})$.
So, by the completeness axiom, $\mathbb{N}$ has supremum $L \in \mathbb{R}$, say.
$\because L = \sup(\mathbb{N})$,
$\therefore \exists n \in \mathbb{N}$ such that $n > L - 1$.
Then $n + 1 \in \mathbb{N}$ but $n + 1 > L (\Rightarrow\Leftarrow, \because L$ is upper bound of $\mathbb{N})$.
This contradiction proves the result.

■

Exercise 10: Let x and y be two real numbers such that $0 < x < y$. Prove, by using the completeness axiom of $\mathbb{R}$, that there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $nx > y$.[3] **(2004,2007)**
HINT:
আগের অংকটাই, এখানে বাড়তি $x < y$ কথাটার কোনো দরকার নেই। ■

Example 21: If $x, y \in \mathbb{R}$ and $x > 0, y > 0$, then prove that there exists a natural number n such that $ny > x$. Hence show that for any nonnegative real number a there exists a natural number m such that $m - 1 \leq a < m$.[3+3] **(2011.1a)**
SOLUTION: প্রথম অংশটা তো Archimedean property-র প্রমাণ, খালি এখানে $x > 0$ শর্তটার কোনো দরকার নেই। দ্বিতীয় অংশটা ?? নম্বর অংকের মত, খালি ওখানে sup ব্যবহার করেছিলাম, এখানে inf ব্যবহার করব।

To show:
$\forall a \geq 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad m - 1 \leq a < m.$
Take any $a \geq 0$.
Let $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n > a\}$.

বুঝতেই পারছ যে A-র মধ্যে minimum সংখ্যাটাই হবে আমাদের m. কিন্তু সেটা বলার আগে দেখাতে হবে যে A-র মধ্যে আদৌ একটা minimum আছে। প্রথমে দেখাব যে A-র infimum আছে।

Clearly, A is bounded from below (by a).
Applying Archimedean property to $1 > 0$ and a,

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad n \cdot 1 = n > a.$$

$\therefore A \neq \phi$.
So it has an infimum, $\ell = \inf(A) \in \mathbb{R}$.

এবার infimum থেকে minimum-এ পৌঁছব--

Then $\exists m \in A \quad m < \ell + 1$.

$\boxed{\exists m}$ Choose this m.

এটাই আমাদের minimum.

$\because m \in A \therefore a < m$.

$\because m < \ell + 1$,

$\therefore m - 1 < \ell$

$\therefore m - 1 \notin A$,

$\therefore m - 1 \leq a$.

Hence $m - 1 \leq a < m$, as required.

■

2.1.3 Appln 3: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

একটা জিনিসকে n জন লোকের মধ্যে সমান ভাগ করে দিলে সবার ভাগে $\frac{1}{n}$ অংশ জুটবে, এবং লোকের সংখ্যা যত বাড়বে, প্রত্যেকের ভাগ ততই কমতে কমতে শূন্যের দিকে যাবে, অর্থাৎ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

এই কথাটা real analysis-এর বার বার কাজে আসে, তা আমরা আগের অধ্যায়েই দেখেছি। এর প্রমাণ করা যায় Archimedean property দিয়ে।

Example 22: Use the Archimedean property to show that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

[2] **(2000)**
SOLUTION:

To show $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

এইটার মানে হল তুমি $\frac{1}{n}$-কে যত খুশী ছোটো করতে পারো, যদি n-কে যথেষ্ট বড় নাও। অংকের ভাষায় অনুবাদ করার চেষ্টা করি--

$\forall \epsilon > 0$ আমরা n-কে যথেষ্ট বড় নিলে $\frac{1}{n} < \epsilon$ হবে,

মানে

$\forall \epsilon > 0$ এমন $N \in \mathbb{N}$ আছে যাতে $n \geq N$ নিলেই $\frac{1}{n} < \epsilon$ হবে,

মানে

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{1}{n} < \epsilon$$

এই কথাটা লিখে প্রমাণটা শুরু করি।

i.e.,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{1}{n} < \epsilon.$

Take any $\epsilon > 0$.

By the Archimedean property applied to $\epsilon > 0$ and 1, we know that

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad N\epsilon > 1.$$

$\exists N$ Choose this N.

এরপর আছে $\forall n \geq N$, অতএব--

Take any $n \geq N$.

Then

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon,$$

as required.

শেষ ধাপটা হল কারণ $N\epsilon > 1$, তাই $\frac{1}{N} < \epsilon$. ■

Example 23: Using the Archimedean property, show that if a is any real number, then $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$.[2] **(2009)**

SOLUTION: এটা প্রায় আগের অংকটাই।

To show $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$,

i.e.,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{|a|}{n} < \epsilon.$

লক্ষ কর এখানে $|a|$ ব্যবহার করেছি, কারণ a-টা positive না negative বলা নেই।

Take any $\epsilon > 0$.

এবার আমরা Archimedean property লাগাব $\epsilon > 0$ আর $|a|$ দিয়ে। **??** নম্বর অংকে ছোট্টো ছোট্টো পায় পৌঁছে যাওয়ার কথা বলেছিলাম, এখানে ϵ হল এক পা, আর $|a|$ হল যে দূরত্ব পার করতে চাই।

By the Archimedean property,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad N\epsilon > |a|.$$

$\exists N$ Choose this N.

মানে N বার পা ফেললে আমরা $|a|$ দূরত্ব পার করতে পারব।
এবার আছে $\forall n \geq N$, তাই--

Take any $n \geq N$.

 Then $n\epsilon > |a|$,

or, $\frac{|a|}{n} < \epsilon$, as required.

■

Example 24: If

$$S = \left\{ \frac{5}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

show that $\inf S = 0$.[2] **(2008)**

SOLUTION: এটাও প্রায় একই অংক। চট্ করে মনে করে নিই infimum-এর definition-এর দুটো অংশ। তাই প্রমাণটারও দুটো ধাপ।

Step 1: To show 0 is a lower bound of S.

$\because \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{5}{n} > 0,$

$\therefore 0$ is lower bound of S.

এবার দ্বিতীয় ধাপ--

Step 2: To show

 $\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in S \quad x < 0 + \epsilon.$

 Take any $\epsilon > 0$.

By Archimedean property,

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \frac{5}{n} < \epsilon.$$

 Choose $x = \frac{5}{n} \in S$.

 Then $x < \epsilon$, as required.

■

DAY 3
More applications

3.1 Appln 4: Existence of roots

আমরা স্কুল থেকে শুনে আসছি যে $\sqrt{2}$ বলে একটা positive সংখ্যা আছে, যার square হল 2. কই axiom-গুলোতে তো $\sqrt{2}$-র অস্তিত্বের উল্লেখ নেই! তার মানে $\sqrt{2}$ যে সত্যই একটা positive real number সেটা প্রমাণ করতে পারা উচিত। এইবার আমরা এই প্রমাণটাই করব।

প্রমাণটা খুব সহজ নয়। সেটা শুরু করার আগে বলে নিই এই জিনিসটা দেখানো কেন গুরুত্বপূর্ণ। প্রথমতঃ, $\sqrt{2}$ ছিল মানুষের আবিষ্কৃত প্রথম irrational সংখ্যা। এটাকে সত্যই একটা সংখ্যার মর্যাদা দেওয়া যায় কি না, না কি এটা নিতান্তই শয়তানের কারসাজি সে বিষয়ে আবিষ্কর্তা স্বয়ং Pythagoras -এর মনেই বিস্তর সংশয় ছিল। এই প্রমাণে সেই সন্দেহের নিরসন হবে। দ্বিতীয়তঃ এর ফলেই প্রমাণ হবে যে সংখ্যার জগতে rational-দের বাইরেও কিছু জিনিস আছে।

Example 25: দেখাও যে এমন একটা positive সংখ্যা আছে, যার square হল 2.

SOLUTION: তার মানে এমন $x > 0$ চাই যাতে $x^2 = 2$ হয়। আমরা তার থেকে একটু কমজোরী জিনিস থেকে শুরু করি--সেইসব $x > 0$ যাতে $x^2 \leq 2$ হয়। এরকম x অবশ্যই আছে, যেমন $x = 1$. এরকম সব সংখ্যার set-টা নিই--

> Let $A = \{x > 0 \ : \ x^2 \leq 2\}$.

আমরা দেখাব যে $\sup A$-ই হল $\sqrt{2}$. কিন্তু $\sup A$ নিয়ে কথা বলার আগে দেখাতে হবে যে সেটা আদৌ আছে, মানে $A \neq \phi$ এবং bounded above.

> Then $A \neq \phi$. because $1 \in A$.

লক্ষ কর যে খুব বড়ো সংখ্যারা A-র মধ্যে নেই, যেমন $x > 2$ হলেই $x^2 > 4$ হয়ে যাবে। তার মানে A হল bounded above.

> Also, A is bounded from above by 2, because $x > 2 \implies x^2 > 2^2 > 2$.

সুতরাং completeness axiom বলছে যে A-র supremum আছে। একটা নাম দিই--

> So by completeness axiom, $L = \sup(A) \in \mathbb{R}$ exists.

এই $L > 0$-টাই আসলে $\sqrt{2}$, মানে দেখাব যে $L^2 = 2$.
আচ্ছা, $L^2 < 2$ কি হতে পারে? ধরো পারে। তাহলে আমরা contradiction পাবার জন্য একটা কৌশল করব। আমরা L-এর সাথে খুব ছোটো এমন একটা positive সংখ্যা যোগ করব যাতে যোগফলের square-টাও ≤ 2-এর চেয়ে কম হয়। তাহলে যোগফলটা A-র মধ্যে থাকবে, অথচ $L = \sup(A)$-এর চেয়ে বড় হবে, ফলে contradiction!
আমরা একটু আগেই দেখেছি $\frac{1}{N}$-কে যত খুশী ছোটো বানানো যায় N-কে যথেষ্ট বড় নিলে। তাই আমরা এমন N খুঁজব যাতে

$$(L + \tfrac{1}{N})^2 \leq 2$$

হয়। একটু রাফে কষে দেখি N-টা ঠিক কতটা বড় নিলে এটা হবে। লক্ষ কর যে

$$(L + \tfrac{1}{N})^2 = L^2 + \tfrac{1}{N^2} + \tfrac{2L}{N} \leq L^2 + \tfrac{1}{N} + \tfrac{2L}{N},$$

কারণ $\frac{1}{N^2} \leq \frac{1}{N}$. তার মানে যদি N-টা এমন নিই যাতে

$$L^2 + \tfrac{1}{N} + \tfrac{2L}{N} \leq 2,$$

মানে

$$\tfrac{2L+1}{N} \leq 2 - L^2$$

হয়, তবেই কাজ চলবে, বা ঘুরিয়ে বললে $N \geq \frac{2L+1}{2-L^2}$ নিলেই হবে। সেটা কি সম্ভব? অবশ্যই, কারণ $L^2 < 2$ ধরেছি, ফলে তলার $2 - L^2$-টা শূন্য নয়। আর $\mathbb{N}$ হল unbounded above, সুতরাং যেকোনো real number-এর চেয়ে বড় natural number পাওয়া যায়--

Let, if possible, $L^2 < 2$.
Since $\mathbb{N}$ is unbounded above, so

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad N \geq \frac{2L+1}{2-L^2}.$$

রাফটা না জানা থাকলে এই লাইনটা পুরো ম্যাজিক! এইবার রাফের ধাপগুলো গুছিয়ে দেখাব--

Then

$$\begin{aligned}(L+\tfrac{1}{N})^2 &= L^2 + \tfrac{1}{N^2} + \tfrac{2L}{N} \\ &\leq L^2 + \tfrac{1}{N} + \tfrac{2L}{N} \quad [\because \tfrac{1}{N^2} \leq \tfrac{1}{N}] \\ &\leq L^2 + \tfrac{2L+1}{N} \\ &\leq L^2 + (2-L^2) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Also $L + \frac{1}{N} > L \geq 0$.
So $L + \frac{1}{N} \in A (\Rightarrow\Leftarrow, \because L + \frac{1}{N} > L = \sup(A))$.

এবার উল্টো দিকটা।

Let, if possible, $L^2 > 2$.

এবার প্যাঁচটা একটু অন্যভাবে কষব। এবার L-এর চেয়ে একটু ছোটো একটা positive সংখ্যা $L - \frac{1}{M}$ বার করব যাতে $(L - \frac{1}{M})^2 > 2$ হয়। রাফ কষা যাক--

$$(L-\tfrac{1}{M})^2 = L^2 + \tfrac{1}{M^2} - \tfrac{2L}{M} > L^2 - \tfrac{2L}{M}$$

সুতরাং $L^2 - \frac{2L}{M} > 2$ হলেই কাজ চলবে। তাই আমরা $M > \frac{2L}{L^2-2}$ নেব।

Since $\mathbb{N}$ is unbounded above,

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad M > \frac{2L}{L^2-2}.$$

So

$$\begin{aligned}(L-\tfrac{1}{M})^2 &= L^2 + \tfrac{1}{M^2} - \tfrac{2L}{M} \\ &> L^2 - \tfrac{2L}{M} \\ &> L^2 - (L^2 - 2) \\ &= 2.\end{aligned}$$

সুতরাং $(L - \frac{1}{M})$-এর চেয়ে বড় সংখ্যাদের square-ও হবে > 2. তার মানে A-র কোনো সংখ্যাই $(L - \frac{1}{M})$-এর চেয়ে বড় নয়।

> So $L - \frac{1}{M}$ is an upper bound of $A(\Rightarrow\Leftarrow$, since $L - \frac{1}{M} < L = \sup(A))$.
> Hence it is impossible to have $L^2 < 2$ or $L^2 > 2$. So we must have $L^2 = 2$, as required.

■

Exercise 11: দেখাও যে $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$. ■

Example 26: Can the completeness axiom be justified for the set of rational numbers? Give reason for your answer.[2] **(2006)**

SOLUTION: প্রথমে বোঝা যাক প্রশ্নটার মানে কি। আমরা জানি যে completeness axiom-টা real number-দের জন্য, মানে যদি real number-এর একটা set হয় nonempty এবং bounded from above, তবে তার একটা supremum থাকে যেটাও একটা real number হয়। লক্ষ কর এখানে "real number" কথাটা দুবার এসেছে--প্রথমতঃ set-টা হল real number-এর, আর দ্বিতীয়তঃ, তার supremum-টাও হল একটা real number.
এখানে প্রশ্ন হল "real number"-এর জায়গায় আমরা "rational number" লিখলেও সেটা ঠিক হত কিনা। মানে যদি তোমাকে একটা rational number-এর set দেওয়া হয় যেটা nonempty এবং bounded from above, তবে কি তুমি জোর দিয়ে সব সময়ে বলতে পারো যে তার supremum-টাও একটা rational number হতে বাধ্য?
উত্তর হচ্ছে, না! আমরা সেটাই এবার প্রমাণ করব contradiction দিয়ে।

> No, the completeness axiom does not hold for the set of rational numbers.
> Let, if possible, the axiom hold for $\mathbb{Q}$.
> Let $A = \{x > 0 \ : \ x \in \mathbb{Q}, \ x^2 \leq 2\}$.

লক্ষ কর যে ঠিক আগের অংকটার মতই A নিয়েছি, খালি এখানে কাজ করছি $x \in \mathbb{Q}$ নিয়ে। ঠিক আগের অংকের মতই দেখাব যে $A \neq \phi$ এবং bounded above.

> Now $A \neq \phi \because 1 \in A$. Also A is bounded from above by 2.

যেহেতু আমরা ধরে নিয়েছি যে $\mathbb{Q}$-তেও বেলাতেও completeness axiom খাটে, তাই $L = \sup(A) \in \mathbb{Q}$ পাব।

> By assumed completeness of $\mathbb{Q}$, we have $L \in \mathbb{Q}$ which is $\sup(A)$ in $\mathbb{Q}$.

এবার আবার অংকের মত দেখাও যে $L^2 < 2$ বা $L^2 > 2$ হতে পারে না, তাই $L^2 = 2$ হতে বাধ্য।

> Then $L^2 = 2$.

কিন্তু এক্ষেত্রে সেটাও হতে পারে না, কারণ আমরা জানি যে কোনো rational সংখ্যার square কখনো 2 হতে পারে না।

> But we know that no rational number L can have $L^2 = 2(\Rightarrow\Leftarrow)$, completing the proof.

■

একই অংক সামান্য অন্য ভাষায়--

Exercise 12: State least upper bound axiom of real numbers. Is this axiom valid for the set of rational numbers?–Justify your answer.[1+3] **(2012.1a)** ■

Exercise 13: Prove that the set of all rational numbers is not order complete.[2] **(2003)**
HINT:
এটা আগের অংকটাই, খালি অন্য চেহারায়, কারণ

"The set of all rational numbers is not order complete"

মানে

"The set of all rational numbers does not satisfy the completeness axiom."

■

Exercise 14: Is the least upper bound axiom true for the set of rational numbers? Justify your answer.[2] **(2010.1ap2)**
HINT:
আবার একই অংক অন্য ভাষায়। ■

3.2 Appln 5: Denseness of $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c$ in $\mathbb{R}$

কোনো পার্কে বসার যে বেঞ্চ হয়, সেগুলোতে অনেক সময়ে প্রচুর পিঁপড়ে থাকে। তখন অনেক কায়দা করে পিঁপড়েদের গা বাঁচিয়ে খানিকটা ফাঁকা জায়গা বার করে বসতে হয়। কিন্তু একেকটা বেঞ্চে এত ভয়ংকর পিঁপড়ের উপদ্রব যে এরকম ফাঁকা জায়গা পাওয়ায় যায় না। তখন আমরা বলি যে "ইশ্, এই বেঞ্চটায় পিঁপড়ে একেবারে গিজ্গিজ্ করছে!"
এবার মনে কর $\mathbb{R}$ হল একটা লম্বা বেঞ্চ। তার মধ্যে rational আর irrational দুই ধরণের সংখ্যা আছে। মনে কর যে rational-গুলো হল পিঁপড়ে, irrational-গুলো ফাঁকা জায়গা। তার মানে পুরো বেঞ্চের সব বিন্দুতেই কিন্তু পিঁপড়ে নেই, অথচ এখানে বসার জন্য কোনো ফাঁকা জায়গাও নেই, কারণ rational-গুলো $\mathbb{R}$-এর মধ্যে গিজ্ গিজ্ করছে। তুমি যে কোনো $a < b$ নিয়ে (a, b)-র উপর বসতে চেষ্টা কর, অমনি দেখবে অসংখ্য পিঁপড়ে (মানে rational number) রয়েছে ওই (a, b)-র মধ্যে!
আমরা যাকে বাংলায় "গিজ্গিজ্' বললাম তাকে অংকে বলে “dense”.

DEFINITION: Dense

Let $A \subseteq \mathbb{R}$ be any subset. We say that A is dense in $\mathbb{R}$ to mean

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ with } a < b \quad \exists x \in A \quad x \in (a, b).$$

চাইলে সংজ্ঞাটাকে এভাবেও লেখা যেত--

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ with } a < b \quad (a,b) \cap A \neq \phi.$$

নীচের অংকটা এই definition-টাকে হজম করতে সাহায্য করবে।

Example 27: দেখাও যে $A = \mathbb{R} \setminus \{10, 20\}$ হল dense in $\mathbb{R}$.

SOLUTION: তার মানে এখানে সর্বত্রই পিঁপড়ে আছে, খালি 10 আর 20 এই দুটো বিন্দুতে ছাড়া। আমাদের দেখাতে হবে--

To show:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b \quad \exists x \in A \quad x \in (a,b)$.

Take any $a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b$.

এবার x কি করে নিই? একটা সহজ কায়দা হতে পারে $x = \frac{a+b}{2}$ নেওয়া, তাহলে $x \in (a,b)$ হওয়া নিয়ে চিন্তা থাকে না। কিন্তু যদি দুর্ভাগ্যক্রমে এই x-টা 10 বা 20-র সমান হয়ে যায় তবে আবার $x \in A$ থাকবে না, যেমন $a = 9$ আর $b = 11$ হলে, $x = \frac{a+b}{2} = 10$ হয়ে যাচ্ছে। তখন আমরা x-টাকে সামান্য সরিয়ে দেব, এই ধরো 10.1 করে দিলাম। এরকম সরিয়ে দেওয়া সব সময়েই যাবে, কারণ (a,b)-র মধ্যে তো অসংখ্য point আছে, আর আমাদের আপত্তি মোটে দুটো point নিয়ে, 10 আর 20. এই যুক্তিটাকেই এবার in general লিখব--

Then (a,b) is an infinite set, and so $(a,b) \setminus \{10, 20\} \neq \phi$.

So $\exists x \in (a,b) \setminus \{10, 20\}$.

$\exists x$ Choose this x.

Then $x \in A$ nd $x \in (a,b)$, as required.

■

লক্ষ কর এখানে $\{10, 20\}$-র কোনো বিশেষ ভূমিকা ছিল না। ওটা যে একটা finite set এটাই খালি কাজে লেগেছে। সুতরাং নীচের অংকটা কি করে এসেছে বুঝতেই পারছ।

Exercise 15: Show that if $B \subseteq \mathbb{R}$ is any finite set, then B^c is dense in $\mathbb{R}$. ■

নীচের অংকে কাজ করতে বলেছে $\mathbb{Z}^c$ নিয়ে। $\mathbb{Z}$ অবশ্য finite নয়, কিন্তু তাও একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে একই যুক্তি এখানেও কাজ করবে।

Exercise 16: দ্যাখাও যে $A = \mathbb{Z}^c$ হল dense in $\mathbb{R}$. ■

Exercise 17: এরা কি dense in $\mathbb{R}$?
(1) $(0,1)$ **(2)** $\mathbb{N}^c$ **(3)** $\{1,2,3\}$ **(4)** $(0,\infty)$.
■

এবার আবার supremum axiom-এর প্রসঙ্গে ফিরে আসি। এর সাহায্যে দেখাব যে $\mathbb{Q}$ এবং $\mathbb{Q}^c$ হল dense in $\mathbb{R}$.

Example 28: Prove that every open interval contains infinitely many rational numbers[3] **(2005)**

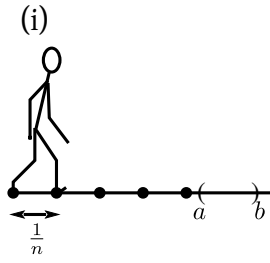
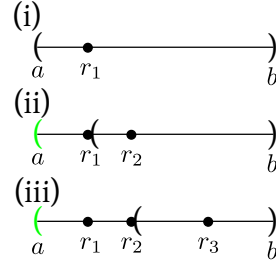
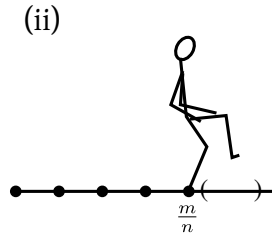



Fig 16 **Fig 17**

SOLUTION: এই অংকটা দুই ধাপে করব। প্রথম ধাপে দেখাব যে, যে কোনো open interval-এর মধ্যেই অন্ততঃ একটা rational number আছে। আর দ্বিতীয় ধাপে দেখাব যে একখানা থাকলেই infinitely many rational number থাকতে বাধ্য।

Step 1: Shall show that every open interval contains at least one rational number,

i.e.,

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b \quad \exists r \in \mathbb{Q} \quad r \in (a, b)$.

$\boxed{\forall a, b}$ Take any $a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b$.

By Archimedean property applied to $b - a > 0$ and 1,

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad n(b-a) > 1, \ \ i.e., \ \frac{1}{n} < b - a.$$

এবার যা করতে চলেছি সেটা বোঝার জন্য Fig 16(i) দ্যাখো। একটা লোক যেন real line-এর ওপর দিয়ে হেঁটে চলেছে। পথে (a, b) হল একটা গর্ত। লোকটার প্রতি পদক্ষেপের দৈর্ঘ্য $\frac{1}{n}$, যেটা গর্তের দৈর্ঘ্যের (মানে $b - a$-এর) চেয়ে ছোটো। চলতে চলতে লোকটা একসময়ে গর্তের সামনে এসে উপস্থিত হবে (Fig 16(ii)), এবং বলাই বাহুল্য যে, পরের পদক্ষেপে হুড়মুড়িয়ে গর্তে গিয়ে পড়বে। এই কথাটাই এবার অংকের ভাষায় লিখব।

Let m be the largest integer $\leq an$.

Then $\frac{m}{n} \leq a$. So

$$\frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b.$$

অর্থাৎ যেহেতু প্রতিটি পদক্ষেপের দৈর্ঘ্য $(b - a)$-এর থেকে ছোটো তাই লোকটা এক লাফে গর্ত ডিঙিয়ে b-এর ওই পাশে গিয়ে পড়তে পারে না।

Also, by construction $\frac{m+1}{n} > a$.

আবার a-র এই পাশেও থাকতে পারে না, কারণ m ছিল maximum যাতে $\frac{m}{n} \leq a$ হয়। সুতরাং $\frac{m+1}{n}$-কে গর্তের মধ্যে পড়তেই হবে।

$\boxed{\exists r}$ Choose $r = \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Q}$.

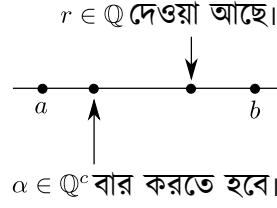



Fig 18

Then $r \in (a, b)$, completing step 1.

এবার দ্বিতীয় ধাপ, যেখানে আমরা প্রথম ধাপটাকে বারবার লাগাব--

> Step 2: Shall show every open interval contains infinitely many rational numbers:
> Let $a < b$. Then by step 1, $\exists r_1 \in \mathbb{Q}$ such that $r_1 \in (a, b)$.

Fig 17(i) দ্যাখো। এবার আমরা একই কাজ আবার করব (r_1, b)-এর মধ্যে (Fig 17(ii)). এইভাবে চলতেই থাকবে (Fig 17(iii)).

> Applying step 1 to (r_1, b) we get $r_2 \in \mathbb{Q}$ with $r_2 \in (r_1, b) \subseteq (a, b)$.
> Continuing in this way $\forall n \in \mathbb{N}$ we get rational $r_{n+1} \in (r_n, b) \subseteq (a, b)$.
> Since the r_n's are all distinct, we have obtained infinitely many rationals in (a, b),as required.

■

Example 29: Let a and b be two real numbers. Assuming that there exists a rational number such that $a < r < b$, prove that there exists an irrational number α such that $a < \alpha < b$.[3] **(2003,2007)**

SOLUTION: Fig 18 দ্যাখো। আমরা এই কথাটা ব্যবহার করব যে, একটা rational-এর সঙ্গে একটা irrational-এর যোগফল সব সময়ে irrational হয়। যদি rational-টা শূন্য না হয়, তবে গুণফলটাও irrational হয়।

> We know that
> $$\forall x \in \mathbb{Q} \quad \forall y \in \mathbb{Q}^c \quad x + y \in \mathbb{Q}^c \text{ and for } x \neq 0 \quad xy \in \mathbb{Q}^c. \qquad (*)$$

এবার দুটো কেসে ভেঙে নেব, a সংখ্যাটা rational না irrational তার উপর নির্ভর করে--

Case 1: If $a \in \mathbb{Q}^c$,
then choose $\alpha = \frac{a+r}{2}$.
Case 2: If $a \in \mathbb{Q}$,
then choose $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}a + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})r$.
In both cases $\alpha \in \mathbb{Q}^c$, by (*).
Also, $\alpha \in (a, r) \subseteq (a, b)$, as required.

■

আমরা দেখলাম যে $\mathbb{Q}$ এবং $\mathbb{Q}^c$ দুজনেই $\mathbb{R}$-এর মধ্যে dense. ব্যাপারটা কল্পনা করতেও রোমাঞ্চ হয়, $\mathbb{R}$ যেন একটা একটানা লাইন, যেটা অসংখ্য গুঁড়োর মত সংখ্যা দিয়ে তৈরী। গুঁড়োগুলোর দুটো রং--rational হলে সাদা, আর irrational হলে কালো। সাদা-কালো সর্বত্র মাখামাখি হয়ে আছে, কোথাও কোনো টানা সাদা অংশ নেই, কোথাও কোনো টানা কালো অংশও নেই! এবার এই জিনিসটার একটা প্রয়োগ দেখি।

Example 30: Prove that the set of all rational numbers is not a closed set.[3] **(2013.2b)**

SOLUTION:

Let, if possible, $\mathbb{Q}$ be closed in $\mathbb{R}$.
Then $\mathbb{Q}^c$ is open in $\mathbb{R}$.
We know that $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c$.
So $\exists \epsilon > 0 \quad N(\sqrt{2}, \epsilon) \subseteq \mathbb{Q}^c$.
Thus, there is no rational number in $(\sqrt{2} - \epsilon, \sqrt{2} + \epsilon) \quad (\Rightarrow\Leftarrow \because \mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R})$.

■

Exercise 18: আচ্ছা, বলো তো $\mathbb{Q}$ কি $\mathbb{R}$-এর মধ্যে open? ■

Exercise 19: Show that A is dense in $\mathbb{R}$ if and only if $\overline{A} = \mathbb{R}$. ■

3.3 Appln 6: Bolzano-Weierstrass theorem

যদি একটা বদ্ধ জায়গায় অসংখ্য লোক ঢোকে, তাহলে গাদাগাদি হতে বাধ্য। অফিসটাইমে যারা কলকাতার বাসে চড়েছ তারা সবাই একথা হাড়ে হাড়ে জানো। ঠিক একই কাণ্ড হয় $\mathbb{R}$-এর ক্ষেত্রেও। যদি একটা bounded subset নাও $\mathbb{R}$-এর মধ্যে এবং তার মধ্যে অসংখ্য point থাকে (মানে subset-টা একটা infinite subset হয়), তবে গাদাগাদি অনিবার্য। গাদাগাদি মানেই অন্ততঃ একটা limit point তৈরী হবে। অর্থাৎ সব মিলিয়ে দাঁড়ালো এই যে, $\mathbb{R}$-এর যে কোনো infinite, bounded subset-এরই অন্ততঃ একটা limit point থাকতে বাধ্য। এইটা একটা বিখ্যাত theorem, যার নাম Bolzano-Weierstrass theorem.

Example 31: State the Bolzano-Weierstrass theorem for the set of real numbers.[1] **(2010,1999)**

SOLUTION:

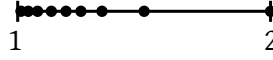



Fig 19

Bolzano-Weierstrass Theorem
Any infinite, bounded subset A of $\mathbb{R}$ has at least one limit point in $\mathbb{R}$.

মনে রেখো--এই যে at least একটা limit point-এর কথা বললাম, সেটা কিন্তু A-র বাইরেও থাকতে পারে। যেমন $A = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$-এর একমাত্র limit point হল $0 \notin A$. ■

Example 32: Verify the Bolzano-Weierstrass theorem for the set $\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.[3] **(1999)**

SOLUTION: এখানে একটা set দিয়ে বলেছে সেই set-এর জন্য Bolzano-Weierstrass Theorem-টাকে "verify" করতে। তার মানে কি? মানে হল তোমাকে পরীক্ষা করে দেখতে হবে এই set-টা Bolzano-Weierstrass Theorem-এর যাবতীয় শর্ত পালন করে কি না, এবং করলে ওই theorem-এর সিদ্ধান্ত এই set-এর ক্ষেত্রে খাটে কি না (বলাই বাহুল্য যে খাটবে, নইলে তো theorem-টা ভুল প্রমাণ হয়ে যেত)। কিন্তু তোমাকে সেটা সরাসরি কষে দেখাতে হবে, অর্থাৎ set-টার একটা limit point বার করে দেখাতে হবে।

Let $A = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

প্রথম শর্ত A-কে infinite হতে হবে।

Then A is infinite, because each $1 + \frac{1}{n}$ is distinct and $\mathbb{N}$ is infinite.

দ্বিতীয় শর্ত boundedness.

A is bounded, because

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2.$$

লক্ষ করো যে bounded দেখানোর জন্য নীচ এবং ওপর দুদিক থেকেই bound করতে হল।

So by the Bolzano-Weierstrass Theorem, A must have a limit point in $\mathbb{R}$.

এইটা হল Bolzano-Weierstrass Theorem-এর সিদ্ধান্ত। এবার আমরা সরাসরি কষে দেখব যে এটা আমাদের A-র জন্য সঠিক--

Shall show that 1 is a limit point of A,

Set-টা দেখতে কেমন সেটা Fig 19-এ দেখানো হয়েছে। দেখাই যাচ্ছে যে 1-এর কাছাকাছি একটা ভীড় জমছে। তার মানে 1-এ একটা limit point আছে। লক্ষ করো যে, 1 কিন্তু A-র মধ্যে নেই।

(a) এই ভীড়টার কেন্দ্রটা হল একটা limit point.

(b) আঙুল রাখলাম set-টার বাঁদিকে কোথাও।

(c) আঙুল ডানদিকে সরাচ্ছি। আঙুলের ডানদিকে point-এর সংখ্যা এখনও infinite.

(d) আরো ডানদিকে গেলে আঙুলের ডানদিকে খালি finite-সংখ্যক point পড়ে থাকবে।

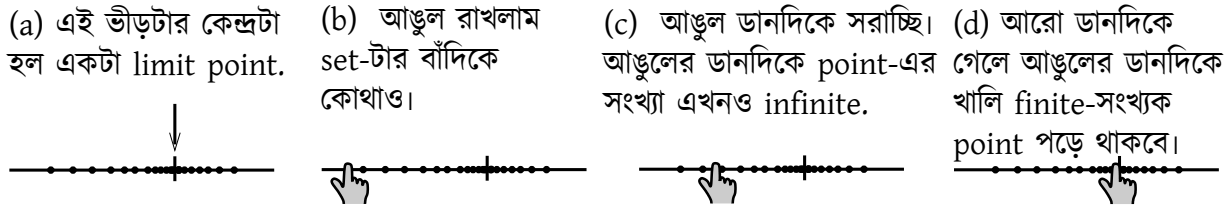



Fig 20

i.e.,

$\forall \delta > 0 \quad N'(1, \delta) \cap A \neq \phi.$

$\forall\delta$ Take any $\delta > 0$.

Then by Archimedean property,

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{1}{n} < \delta.$$

So $1 + \frac{1}{n} \in (1, 1 + \delta) \subseteq N'(1, \delta)$.

$\therefore N'(1, \delta) \cap A \neq \phi$, as required.

■

যদি একটা finite set নিতাম তবে কিন্তু limit point-এর প্রশ্নই উঠত না। যেমন $A = \{1, 2, 3\}$-এর কোনো limit point নেই। আবার যদি একটা infinite set নিতাম তাহলেও limit point এড়ানো যেত যদি set-টা unbounded হত, কারণ সেক্ষেত্রে সবাই বেশ ফাঁক ফাঁক করে দাঁড়াতে পারত। এরকম একটা উদাহরণ হল $\mathbb{N}$, এখানে point-গুলো সব এক এক করে ফাঁক বজায় রেখেছে।

Example 33: Can you apply the Bolzano-Weierstrass theorem for the set $\{1, 2, 3, ...\}$? Justify your answer.[1] **(2010)**

SOLUTION:

No, we cannot, because the set $\{1, 2, 3, ...\}$ is not bounded.

■

এবার দেখি কি করে Bolzano-Weierstrass theorem-টা প্রমাণ করতে হয়।

Example 34: State and prove Bolzano-Weierstrass theorem in $\mathbb{R}$.[5] **(2009)**

SOLUTION: Theorem-টা তো আগেই লিখেছি। প্রমাণটা বোঝার জন্য Fig 20 দ্যাখো। আমরা set-টার বাঁদিকে $\mathbb{R}$-এর উপর কোথাও আঙুল রাখব। তারপর আঙুল টাকে ক্রমশঃ ডান দিকে সরাতে থাকব। কিছু point আঙুলের বাঁ দিকে চলে গেলেও আমাদের আপত্তি নেই, খালি যেন আঙুলের ডান দিকে সব সময়ে infinitely many point থাকে। এইভাবে সরাতে সরাতে আঙুলটা যেখানে আটকাবে সেটা একটা limit point হতে বাধ্য।

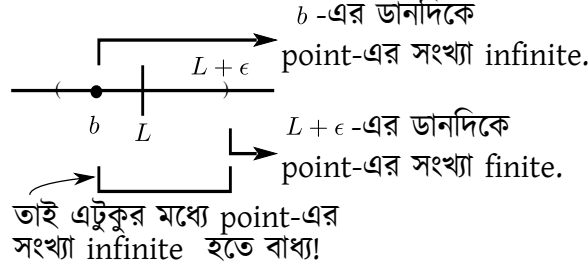
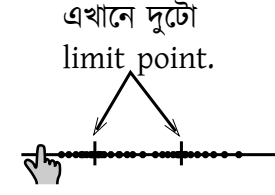



Fig 21 **Fig 22**

Proof: Let $A \subseteq \mathbb{R}$ be bounded and infinite.

$\because A$ is bounded,

$\therefore \exists M > 0 \quad A \subseteq [-M, M]$.

Define $B \subseteq \mathbb{R}$ as

$$B = \{x \ : \ \text{infinitely many points of } A \text{ are } \geq x\}.$$

এই B হল সেই সব point-এর set যেখানে আমরা আঙুল রাখতে পারি। ডান দিকে সরাতে সরাতে আঙুল আটকে যাওয়া মানে আমরা B-এর supremum-এ পৌঁছতে চাইছি। সুতরাং আগে দেখে রাখি যে B-এর supremum আদৌ আছে, মানে B হল nonempty এবং bounded from above.

Then $B \neq \phi$, since $-M \in B$.

[[Because:

All points of A are $\geq -M$,
and A has infinitely many points.

]]

Also, B is bounded from above by M.

[[Because:

If $x > M$, then no point of A is $\geq x$.

]]

So $L = \sup B$ exists in $\mathbb{R}$.

এইবার দেখাব যে এই L-টা হল A-র একটা limit point.

Shall show that L is a limit point of A, *i.e.*,

$\forall \epsilon > 0 \quad N'(L, \epsilon) \cap A \neq \phi$.

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because L = \sup(B)$, $\therefore \exists b \in B \quad b > L - \epsilon$.

এবার Fig 21 দ্যাখো। লক্ষ কর যে b-র ডান দিকে infinitely many point আছে, কিন্তু $L+\epsilon$-এর ডান দিকে আছে

মোটে finitely many point, কারণ $L+\epsilon \notin B$. তার মানে $(b, L+\epsilon)$-এর মধ্যে infinitely many point থাকতে বাধ্য।

> $\because b \in B$, $\therefore$ there are infinitely many points of A that are $\geq b$.
>
> But $\because L+\epsilon \notin B$, $\therefore$ there are only finitely many points of A that are $\geq L+\epsilon$.
>
> $\therefore$ there are infinitely many points of A that are in $(b, L+\epsilon) \subseteq N(L,\epsilon)$.
>
> $\therefore$ there is at least one point of A in $N'(L,\epsilon)$.
>
> $\therefore N'(L,\epsilon) \cap A \neq \phi$, as required.

■

এই যে আমরা আঙুল সরানোর গল্পটা বললাম, এটা কিন্তু অন্যভাবেও করা যেত। যেমন আমরা set-টার ডানদিকে কোথাও শুরু করে, আঙুলটাকে ক্রমশঃ বাঁদিকে সরাতে পারতাম। তাহলেও আঙুলটা একটা limit point-এসে আটকাত। আরেকটা কায়দা দিয়েছে নীচের অংকটায়--এখানে আমরা আঙুলটাকে set-টার বাঁদিকে রেখে শুরু করছি, এবং ডানদিকে সরাচ্ছি। কিন্তু এবার শর্তটা হল, আঙুলের বাঁদিকে যেন খালি finite-সংখ্যক point থাকে।

Exercise 20: Fig 22-এ একটা set দেখিয়েছি যার মধ্যে দুজায়গায় ভীড়, মানে দুটো limit point. আঙুলটা রেখেছি set-টার বাঁদিকে। এবার ডানদিকে সরাতে থাকো। যদি (**??**) নম্বর অংকের মত এগোও তবে কোন limit point-এ এসে আঙুলটা থামবে? আর যদি আমাদের নতুন শর্তটা মেনে এগোও তবে? ■

নতুন শর্তটা মেনে এগোলে আমাদের B হত

$$B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \text{ is greater than only finite number of elements}\}.$$

সেক্ষেত্রে বাকি অংকটা একইরকম যুক্তিতে করা যেত, নীচের অংকে সেটাই তোমায় করে দেখাতে বলেছে।

Exercise 21: Let A be a bounded infinite subset of $\mathbb{R}$. Let $B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x$ is greater than finite number of elements of $A\}$. Show that $\sup B$ (if exists) is a limit point of A.[5] **(2013.2a)**
HINT:
এখানে অবশ্য একটা ছোটো ভুল করে ফেলেছে। বলা উচিত ছিল

$$B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \text{ is greater than only finite number of elements}\},$$

কিন্তু ভুল করে “only” শব্দটা বাদ দিয়ে ফেলেছে। ফলে ব্যাপারটা হয়েছে সেই ধাঁধাটার মত-- কোন কোন মাসে 28 দিন আছে? উত্তর হল--সব মাসেই। যদি বলত "কোন কোন মাসে খালি 28 দিনই আছে?" তবে উত্তর হত--February (অবশ্য leap year না হলে)। যাই হোক, এই সুক্ষ্ম ভুলটা বাদ দিলে মূল ব্যাপারটা আগের মতই। ■

Exercise 22: Prove that every infinite bounded set of real numbers has at least one accumulation point.[5] **(1997,2002,2006,2011)**
HINT:
আগের অংকটাই। Accumulation point মানে যে limit point সেটা নিশ্চয়ই মনে আছে? ■

Exercise 23: Prove that every infinite bounded set of real numbers has at least one accumulation point. Is the converse true? Justify your answer.[4+2] **(2011)**
HINT:
প্রথম অংশটা আগের অংকটাই। দ্বিতীয় অংশটা--

> Converse: Every set of real numbers with at least one accumulation point is infinite and bounded.
>
> This statement is false. For example, $(0, \infty)$ has an accumulation point 1, but it is not bounded.

■

Answers

1. না। **2.** **(1)** 3, **(2)** 1, **(3)** 3. **3.** **(1)** হ্যাঁ, **(2)** হ্যাঁ, **(3)** না, **(4)** না, **(5)** হ্যাঁ (vacuously) **7.** যদি $S, T \subseteq \mathbb{R}$ হয় nonempty এবং bounded from below, তবে $\inf(S \cup T) = \min\{\inf S, \inf T\}$ হবে। **8.** $(\ell - \epsilon, \ell) \cap A \neq \phi$. আবার আর $(\ell, \ell + \epsilon) \cap A^c \neq \phi$. সুতরাং $N(\ell, \epsilon) \cap A \neq \phi$ এবং $N(\ell, \epsilon) \cap A^c \neq \phi$. **9.** আগের অংকে কিভাবে supremum থেকে maximum-এ পৌঁছেছিলাম মনে আছে? ঠিক সেইভাবে এখানে infimum থেকে minimum-এ পৌঁছতে হবে। **11.** প্রথমে $L = \sup\{x > 0 \ : \ x^2 \leq 3\}$ নাও। যদি $L^2 < 3$ হয় তবে এমন $M \in \mathbb{N}$ নাও যাতে $\left(L + \frac{1}{M}\right)^2 < 3$ হয়। তা থেকে একটা contradiction পাবে। সুতরাং $L^2 \geq 3$. একইভাবে দেখাও যে $L^2 > 3$ হলেও contradiction. সুতরাং $L^2 = 3$. **15.** $\forall a < b \in \mathbb{R} \quad (a, b)$ is infinite. So $(a, b) \setminus B \neq \phi$. Choose any $x \in (a, b) \setminus B$. Then $x \in B^c$ and $x \in (a, b)$. **16.** যেকোনো $a < b \in \mathbb{R}$ নাও। লক্ষ কর যে (a, b)-র মধ্যে খালি finite-সংখ্যক integer-ই আছে। সেটা লিখে বোঝানোর জন্য $m = [a]$ আর $n = [b] + 1$ নাও। তাহলে $(a, b) \cap \mathbb{Z} \subseteq \{m, ..., n\}$, যেটা একটা finite set. সুতরাং $(a, b) \setminus \mathbb{Z} = (a, b) \setminus \{m, ..., n\}$. যেহেতু (a, b) হল infinite, আর $\{m, ..., n\}$ হল finite, তাই $(a, b) \setminus \{m, ..., n\} \neq \phi$. **17.** না, হ্যাঁ, না, না। **18.** না। **19.** ধরো A হল dense in $\mathbb{R}$. তবে $\forall r \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad (r, r + \epsilon) \cap A \neq \phi$. তাই $N'(r, \epsilon) \cap A \neq \phi$. তাই $r \in A'$, মানে $A' = \mathbb{R}$. ফলে $\overline{A} = \mathbb{R}$. আবার conversely, যদি $\overline{A} = \mathbb{R}$ হয়, তবে let, if possible, $\exists a < b \in \mathbb{R} \quad (a, b) \cap A = \phi$. ধরো $c = \frac{a+b}{2}$ আর $\epsilon = \frac{b-a}{2}$ নিলাম, তবে $c \notin A$ এবং $N'(c, \epsilon) \cap A = \phi$. সুতরাং $c \notin A'$. অতএব $c \notin \overline{A} (\Rightarrow \Leftarrow)$. **20.** ডানদিকের limit point. বাঁদিকের limit point.

Chapter VI
Sequences (part 1)

DAY 1
Introduction

এবার যে অংকগুলো করব সেগুলো sequence নিয়ে। একটা sequence মানে অনেকগুলো সংখ্যা পর পর লেখা, যেমন

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ...$$

বা

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, ...$$

ঠিক কতগুলো সংখ্যা? উত্তর হল--অসংখ্য বা infinitely many, অর্থাৎ ডট্ ডট্ করে চলতেই থাকবে, কোথাও থামবে না! লক্ষ কর যে একই সংখ্যা বার বার আসতে পারে। এখানে প্রতিটা সংখ্যাকে বলে এককেটা term, যেমন প্রথম sequence-টার প্রথম term 1^2, দ্বিতীয় term $2^2 = 4$. পরের sequence-টার ক্ষেত্রে odd term-গুলো সবাই 1 অর্থাৎ বিজোড়-সংখ্যক term-গুলো (মানে 1 নম্বর, 3 নম্বর, 5 নম্বর ইত্যাদি term-গুলো) হল সবাই 1. আর even term-গুলো সবাই -1. সাধারণতঃ যেসব sequence নিয়ে আমরা কাজ করি তাদের term-গুলোর মধ্যে একটা প্যাটার্ণ থাকে। এই প্যাটার্ণটাকে ফর্মুলার আকারে লিখলে অংক করতে সুবিধা হয়। আমরা সেই ফর্মুলা থেকে চট্ করে বলতে পারি যে n-th term-টা কত হবে। যেমন উপরের প্রথম sequence-টার ক্ষেত্রে বোঝাই যাচ্ছে যে, n-th term-টা হবে n^2. তাই আমরা এই sequence-টাকে লিখতে পারি এইভাবে--

$$\{n^2\}_n$$

এই লেখার কায়দাটা ভালো করে লক্ষ কর-- আমরা এখানে $\{\cdots\}$ ব্র্যাকেট ব্যবহার করছি। ভিতরে লিখেছি n-th term-টার ফর্মুলা। আর $\{\cdots\}$-এর ডানদিকে নীচে ছোটো করে লিখেছি n, যাতে বোঝা যায়, যে n^2-টা হল sequence-টার n-th term. এই n-কে বলে **index.** এই index-এর নাম বদলালেও sequence-টা বদলায় না, যেমন আমরা এভাবেও লিখতে পারতাম--

$$\{m^2\}_m$$

অনেকসময়ে আমরা ফর্মুলাটাকে সরাসরি $\{\cdots\}$-র মধ্যে না লিখে বাইরে লিখি, এইভাবে--

$$\{a_n\}_n \text{ যেখানে } a_n = n^2.$$

ফর্মুলাটা যদি একটু বেশী বড় হয় তবে এইভাবে লিখলে অনেক সময়ে সুবিধা হয়। এখানেও কিন্তু a অক্ষরটার কোনো আলাদা গুরুত্ব নেই, ওর জায়গায় b, c, x, y যা খুশী লিখতে পারতাম, যেমন--

$$\{x_n\}_n \text{ যেখানে } x_n = n^2.$$

দ্বিতীয় sequence-টা ছিল $1, -1, 1, -1, ...$। এটাকে ফর্মুলা দিয়ে লেখা যায় $\{c_k\}_k$, যেখানে

$$c_k = (-1)^{k+1}.$$

Example 1: ধরো তোমাকে একটা sequence দিলাম $\{a_n\}_n$ যেখানে $a_n = \frac{n-1}{n^2}$. তবে a_1, a_5 আর a_6 বার কর।

SOLUTION: $n = 1$ বসিয়ে পাই $a_1 = \frac{1-1}{1^2} = 0$.
$n = 5$ বসিয়ে পাই $a_5 = \frac{5-1}{5^2} = \frac{4}{25}$.
$n = 6$ বসিয়ে পাই $a_6 = \frac{6-1}{6^2} = \frac{5}{36}$. ■

Exercise 1: Find the terms b_2, b_5, b_{10} of the sequence $\{b_n\}_n$ where $b_n = (-n)^n$. ■

Example 2: একটা sequence $\{a_n\}_n$ দেওয়া আছে এই রকম--

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

এর প্যাটার্ণটাকে বার করে a_n-এর ফর্মুলা লেখো। সেই ফর্মুলা ব্যবহার করে a_{13} বার কর।
SOLUTION: লক্ষ কর numerator-গুলো $1, 2, 3, 4, \ldots$ করে চলেছে, আর denominator-গুলো সবসময়েই numerator-এর চেয়ে 1 বেশী। তার মানে a_n-এর numerator হবে n আর denominator হবে $n+1$, অর্থাৎ

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

এবার $n = 13$ বসালে পাই

$$a_{13} = \frac{13}{13+1} = \frac{13}{14}.$$

■

Exercise 2: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে a_n-এর ফর্মুলা লেখো--

1. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots$
2. $0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, \ldots$
3. $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$

■

1.1 Sequence-এর গ্রাফ আঁকা

লক্ষ কর যে একটা sequence-কে ফর্মুলা হিসেবে লেখা মানে আসলে একটা function লেখা। যেমন যদি $\{f_n\}_n$ হয়

$$1^2, 2^2, 3^3, \ldots$$

তবে $f_n = n^2$. এটাকে $f(n) = n^2$ হিসেবে লিখলেই চিনতে পারবে যে sequence-টা আসলে একটা function ছাড়া কিছুই নয়, এমন একটা function যেটা খালি $1, 2, 3, \ldots$ ইত্যাদি point-এই defined (অর্থাৎ $f(\frac{1}{2})$ বা $f(\frac{2}{5})$ ইত্যাদির কোনো মানে হয় না)। এইভাবে একটা sequence হল আসলে $\mathbb{N}$ থেকে $\mathbb{R}$-এ একটা function.
আমরা জানি ছবি এঁকে একটা function-কে বোঝাবার সহজ উপায় হল তার গ্রাফ আঁকা। একটা sequence যেহেতু আসলে একটা function, সুতরাং তারও গ্রাফ আঁকা যায়, এবং সেটা অনেক সময়েই খুব কাজে আসে। Fig 1-এ গ্রাফ এঁকে $1, 2, 3, 4, \ldots$ sequence-টাকে দেখানো হয়েছে। এখানে x-axis-এ n আর y-axis-এ $a_n = n$ দেখানো হয়েছে।

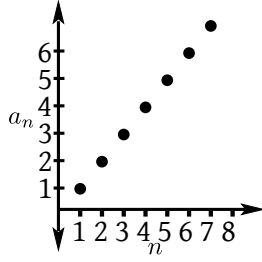
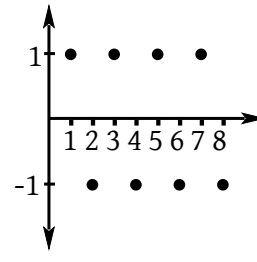



Fig 1 **Fig 2**

$1, -1, 1, -1, \ldots$ sequence-টার গ্রাফ রয়েছে Fig 2-এ।

মনে রেখো যে একটা sequence-এর গ্রাফ খালি বিন্দু বিন্দু দিয়ে আঁকা হয়, বিন্দুগুলোকে কোনো লাইন দিয়ে যোগ করা হয় না, কারণ একটা sequence হল এমন একটা function $f(n)$, যেটা খালি $n = 1, 2, 3, \ldots$ ইত্যাদিতেই defined, n-এর কোনো ভগ্নাংশ value-তে defined নয়।

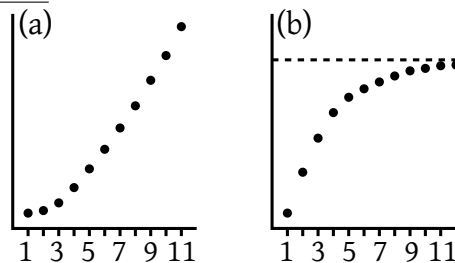
1.2 নানা ধরণের sequence

পৃথিবীর সব মানুষকে যেমন বিভিন্নভাগে শ্রেণীবিভক্ত করা যায় (যেমন, জাতি দিয়ে--ভারতীয়, নেপালী, আমেরিকান ইত্যাদি) কিংবা উচ্চতা দিয়ে (বেঁটে, লম্বা), তেমনি sequence-দেরও নানারকম শ্রেণীবিভাগ আছে। এরকম তিন ধরণের শ্রেণীবিভাগের কথা আমরা এখানে শিখব।

1.2.1 Monotone sequences

Fig 3-এ দুটো sequence-এর গ্রাফ দেখানো হয়েছে। লক্ষ কর যে দুই ক্ষেত্রেই বিন্দুগুলো ক্রমশঃ উপরে উঠে চলেছে। এরকম sequence-কে বলে nondecreasing sequence.

> DEFINITION: **Nondecreasing**
>
> A sequence $\{a_n\}_n$ is called nondecreasing if
>
> $$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots$$

Fig 3

DEFINITION: Strictly increasing

A sequence $\{a_n\}_n$ is called strictly increasing if

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$$

মনে রেখো যে strictly increasing sequence-রা কিন্তু nondecreasing-ও বটে। কিন্তু increasing sequence কথাটার ঠিক একটাই কোনো সংজ্ঞা নেই, কেউ কেউ increasing sequence বলতে বোঝেন strictly increasing sequence, কেউ বোঝেন nondecreasing sequence.

Exercise 3: একইভাবে nonincreasing এবং strictly decreasing sequence-এর সংজ্ঞা লেখো। ■

এখানেও decreasing sequence বলতে কখনও strictly decreasing আবার কখনও nonincreasing sequence বোঝায়। প্রসঙ্গ থেকে বুঝতে হয় যে কোন অর্থে ব্যবহার হচ্ছে।

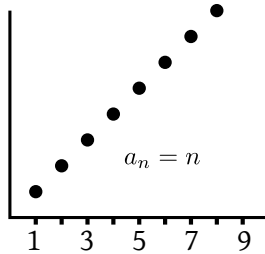
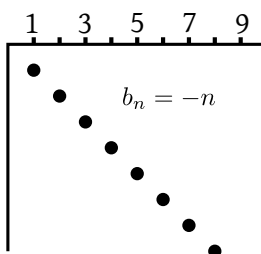
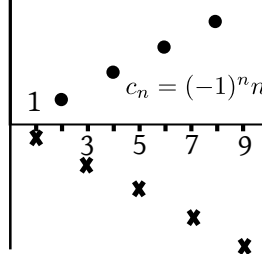
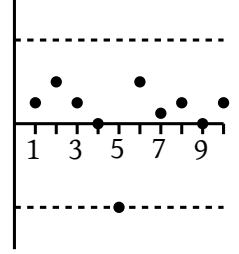
DEFINITION: Monotone sequence

A sequence is called monotone if it is either nonincreasing or nondecreasing. It is called strictly monotone if it is either strictly increasing or strictly decreasing.

এমন sequence অবশ্যই আছে যেটা monotone নয়, মানে এই চার ধরণের কোনোটাতেই পড়ে না, যেমন $\{(-1)^n\}_n$.

Exercise 4: এমন sequence কি সম্ভব যেটা একই সঙ্গে nonincreasing এবং nondecreasing? ■

1.2.2 Bounded/unbounded

আরেকরকম শ্রেণীবিভাগ হল bounded বনাম unbounded.
Fig 4, Fig 5 আর Fig 6-এ তিনটে sequence-এর গ্রাফ রয়েছে। এদের মধ্যে a_n ক্রমশঃ উঠতে উঠতে ছাদ ফুঁড়ে ∞ অবধি ছুটেছে। আর b_n ছুটেছে নীচের দিকে, একেবারে $-\infty$ না গিয়ে থামবে না। c_n-টা মনস্থির করতে পারছে না কোন দিকে যাবে, ওর odd term-গুলো ছুটছে $-\infty$-র দিকে, (ছবিতে ক্রস দিয়ে দেখিয়েছি), আর even term-গুলো দৌড় দিয়েছে ∞-র দিকে, (ডট্ দিয়ে এঁকেছি)। এই তিনটে sequence-এরই একটা ব্যাপারে মিল আছে, এরা সবাই ∞ বা $-\infty$ অব্ধি হাত বাড়াচ্ছে। এরকম sequence-কে বলে unbounded.
অপরপক্ষে Fig 7-এর sequence-টাকে দ্যাখো। এখানে term-গুলো অসীমের সন্ধানে অভিযান করে নি। এর উপরে নীচে বেড়া বেঁধে দেওয়া যায় (ছবিতে ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইন)। কোনো term কক্ষণো সেই বেড়া অতিক্রম করে না। এই রকম বেড়াকে

বলে bound, আর যেসব sequence-দের জন্য এরকম বেড়া বসানো যায়, তাদের বলে bounded sequence. তার মানে $\{a_n\}_n$-কে bounded sequence বলব যদি--

> এমন কোনো সংখ্যা $M > 0$ থাকে যাতে, $-M$ আর M-এ দুটো বেড়া বসালে যাবতীয় a_n-ই সেই বেড়ার ভিতরে থাকে,

অর্থাৎ--

DEFINITION: Bounded sequence

A sequence $\{a_n\}_n$ is called bounded if

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \in [-M, M].$$

Any such $M > 0$ is called a bound for $\{a_n\}_n$.

Exercise 5: এটার negation করে unbounded sequence-এর definition লেখো। মনে রেখো যে, "$a_n \in [-M, M]$"-এর negation হল "$|a_n| > M$." ■

বলাই বাহুল্য যে, যে কোনো sequence-ই হয় bounded নয় unbounded.
যে সব sequence-এর বেলায় উপর দিকে বেড়া বসানো যায়, (নীচের দিকে কি হয় তা নিয়ে এখানে মাথা ঘামাচ্ছি না) তাদের বলে **bounded above.** Fig 8 দ্যাখো।

DEFINITION: Bounded above sequence

A sequence $\{a_n\}_n$ is called bounded above if

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \le M.$$

Exercise 6: যাদের নীচে বেড়া বসানো যায় সে সব sequence-দের বলে bounded below(Fig 9)। অংকের ভাষায় definition-টা লেখো। ■

Fig 8

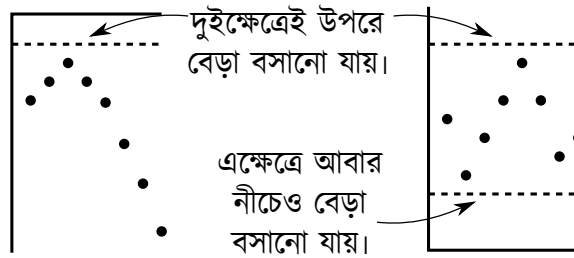
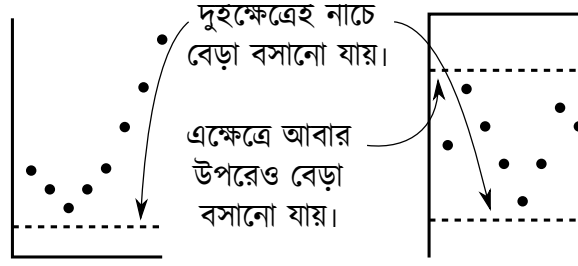



Fig 9

Exercise 7: এই দুটো definition-এর negation নিয়ে আরো দুটো definition বানাও-- unbounded above sequence আর unbounded below sequence. ■

1.2.3 Convergent/divergent/oscillating

এবার আমরা তৃতীয় একটা শ্রেণীবিভাগ শিখব, যেখানে যাবতীয় sequence-দের চারটে দলে ভাগ করা হবে।

- প্রথম দলের কিছু সদস্যের গ্রাফ দ্যাখো Fig 10-এ। লক্ষ কর এরা সবাই ক্রমশঃ কোনো একটা সংখ্যার কাছে এগিয়ে চলেছে (বা একই জায়গায় স্থির হয়ে আছে)। এদের বলে convergent sequence, আর যে সংখ্যাটার দিকে এগোচ্ছে তাকে বলে sequence-টার limit (ছবিতে limit-গুলোকে L নাম দিয়েছি।)

- দ্বিতীয় দলে রয়েছে সেই সব sequence, যারা ∞-র দিকে চলেছে (Fig 11)। এই sequence-দের বলে divergent to ∞.

- তৃতীয় দলে রয়েছে তারা যারা চলেছে $-\infty$-র দিকে (Fig 12)। এরা হল divergent to $-\infty$.

- আর চতুর্থ দলে রয়েছে তারা যারা উপরের তিনটে দলের কোনোটাতেই পড়ে না। এরা সটান ∞ বা $-\infty$-তে যায় না, কোনো সংখ্যার দিকেও যায় না। এই sequence-গুলো কিছুতেই মনস্থির করতে পারে না যে ঠিক কোন দিকে যাবে, তাই একবার এদিকে যায়, আরেকবার ওদিকে যায়। এদের নাম হল oscillating sequence ("oscillating" শব্দের অর্থ দোদুল্যমান), যেমন $\{(-1)^n\}_n$. কয়েকটা নমুনা রয়েছে Fig 13-এ।

গ্রাফ দেখে বোঝা কঠিন নয় একটা sequence কোন দলে পড়ে। এবার দেখি চারটে দলের definition অংকের ভাষায় কি দাঁড়ায়। Convergent sequence মানে এমন একটা সংখ্যা আছে যার দিকে term-গুলো ক্রমশঃই এগিয়ে চলেছে। তার মানে--

> এমন একটা সংখ্যা L আছে, যে term-গুলো তার দিকে এগোচ্ছে।

কতটা কাছে পর্যন্ত এগোচ্ছে? একেবারে গায় গিয়ে পড়ছে, অর্থাৎ--

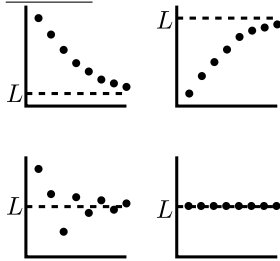
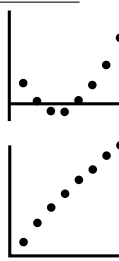
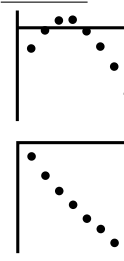
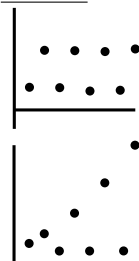
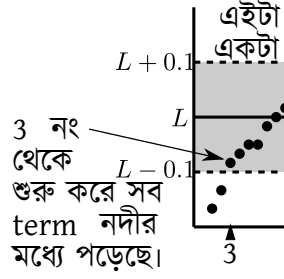
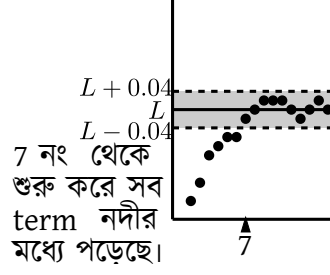



Fig 14   **Fig 15**

> $\exists L \in \mathbb{R}$ যাতে তুমি a_n-গুলোকে L-এর যত খুশী কাছে নিতে পারবে, যদি n যথেষ্ট বড় নাও।

Fig 14 আর Fig 15 দ্যাখো। আমরা লিখতে পারি--

> $\exists L \in \mathbb{R}$ যাতে $\forall \epsilon > 0$ যদি n যথেষ্ট বড় নাও, তবে $|a_n - L| < \epsilon$ করতে পারবে, মানে $a_n \in N(L, \epsilon)$ হবে।

এটাকে আরেকটু গুছিয়ে লিখলেই পাব--

DEFINITION: Convergent

A sequence $\{a_n\}_n$ is said to converge to $L \in \mathbb{R}$ if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n \in N(L, \epsilon).$$

We write

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

এই definition-টা কি করে পেলাম সেটা যদি বুঝে থাকো, তবে "divergent to ∞"-র definition লিখতেও অসুবিধা হবার কথা নয়--

> তুমি a_n-গুলোকে যত খুশী বড় করতে পারবে, যদি n যথেষ্ট বড় নাও,

অর্থাৎ--

> $\forall M \in \mathbb{R}$ তুমি $a_n > M$ করতে পারবে, যদি n যথেষ্ট বড় নাও,

মানে--

DEFINITION: Divergent to infinity

A sequence $\{a_n\}_n$ is said to diverge to ∞ if

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n > M.$$

We write

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty.$$

Exercise 8: একইভাবে divergent to $-\infty$-র সংজ্ঞা কি হবে লেখো। ■

Convergent sequence-রা সবচেয়ে ভদ্র জিনিস, divergent sequence-রা একটু কম ভদ্র, কিন্তু বাকি যারা রইল, মানে oscillating sequence-রা তারা একেবারেই অভদ্র, কখন যে কোথায় লাফ মারবে কিচ্ছু বলা যায় না। যদি দুটো convergent sequence নাও, $a_n \to a$ আর $b_n \to b$, তবে $\{a_n + b_n\}_n, \{a_n - b_n\}_n, \{a_n b_n\}_n$,-ও convergent হবে। এটা বোঝা কঠিন নয় যে

$$a_n \pm b_n \to a \pm b, \quad a_n b_n \to ab$$

হবে। ভাগের বেলাতেও আমরা একই কথা বলতে পারি--$a_n/b_n \to a/b$, খালি বুঝতেই পারছ যে তার জন্য $b_n, b \neq 0$ লাগবে।

Divergent sequence-দের বেলাতেও গল্পটা একইরকম। যদি $a_n \to \infty$ আর $b_n \to \infty$ হয় তবে $a_n + b_n \to \infty$ এবং $a_n b_n \to \infty$ হবে। তবে এরা একটু কম ভদ্র, $a_n - b_n$ এবং a_n/b_n-এর বিষয়ে জোর দিয়ে কিছু বলা যায় না।

Exercise 9: যদি $a_n \to -\infty$ আর $b_n \to -\infty$ হয়, তবে নীচের sequence-গুলোর বিষয়ে কি বলতে পারো?
(1) $a_n + b_n$, **(2)** $a_n - b_n$, **(3)** $a_n b_n$,
■

Exercise 10: যদি $a_n \to \infty$ আর $b_n \to -\infty$ হয় এবং $\forall n \quad a_n, b_n \neq 0$ হয় তবে এদের সম্পর্কে কি বলতে পারো--
(1) $\frac{1}{a_n}$, **(2)** $\frac{1}{b_n}$, **(3)** $a_n + b_n$
■

এবার আসি সবচেয়ে অভদ্রদের কথায়। যদি $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n$ দুজনেই oscillating হয়, তবে $a_n+b_n, a_n-b_n, a_nb_n, a_n/b_n$ এদের কাউকে নিয়েই জোর দিয়ে কিচ্ছুটি বলার জো নেই! যেমন নীচের অংকটাই ধরো। দুজন অভদ্রকে গুণ করলে কিভাবে তাদের অভদ্রতাগুলো কাটাকাটি হয় গিয়ে গুণফলটা ভদ্র হয়ে যেতে পারে দ্যাখো--

Example 3: Give examples of two non-convergent sequences $\{x_n\}_n$ and $\{y_n\}_n$ such that the sequence $\{x_n y_n\}_n$ is convergent.[2] **(2012.3a)**

SOLUTION:

> Let $x_n = (-1)^n$ and $y_n = (-1)^n$. Then $\{x_n\}_n$ and $\{y_n\}_n$ are non-convergent.
> But $x_n y_n \equiv 1$, and so $\{x_n y_n\}_n$ is a constant sequence, and hence convergent.

■

এই অংকের উদাহরণটা কি করে বানালাম সেটা বলি, কারণ কায়দাটা অন্য জায়গাতেও কাজ লাগে। প্রথমে যা খুশি একটা convergent sequence নিয়েছিলাম $\{z_n\}_n$, যেখানে সবসময়েই $z_n \neq 0$. এই অংকে $z_n \equiv 1$ নিয়েছি। এরপর যা খুশি একটা oscillating sequence নিয়েছিলাম $\{x_n\}_n$, খালি যেন $x_n \neq 0$ হয়। তারপর $y_n = z_n/x_n$ নিয়েছি। যেহেতু $x_n y_n = z_n$ হচ্ছে তাই $\{x_n y_n\}_n$-এর convergent হওয়া কেউ ঠেকাতে পারছে না। আর $\{y_n\}$ কোনোভাবেই converge করতে পারে না, কারণ যদি করত তবে $z_n/y_n = x_n$-ও converge করত।

একই কায়দায় নীচের অংকটা কর দেখি।

Exercise 11: এমন দুটো non-convergent sequence দাও $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$ যাতে $\{x_n + y_n\}$ হয় convergent.
■

নীচে একটা নামতার মত টেবিল দিলাম, $\{a_n\}_n$ আর $\{b_n\}_n$-এর আচরণ জানা থাকলে $\{a_n+b_n\}_n$-এর আচরণ বার করা জন্য। এর মধ্যে কয়েকটা খোপে A, B, C, D লেখা আছে। এই সব ক্ষেত্রে $\{a_n+b_n\}_n$-এর আচরণ বিষয়ে জোর দিয়ে কিছুই বলা যায় না।

$\{a_n\}_n$ \ $\{b_n\}_n$	conv	divg to ∞	divg to $-\infty$	oscl
conv	conv	divg to ∞	divg to $-\infty$	oscl
divg to ∞	divg to ∞	divg to ∞	A	B
divg to $-\infty$	divg to $-\infty$	A	divg to $-\infty$	C
oscl	oscl	B	C	D

Exercise 12: A লেখা খোপগুলোর জন্য চারটে উদাহরণ বার কর--প্রতি ক্ষেত্রেই $\{a_n\}_n$ আর $\{b_n\}_n$-এর মধ্যে একজন ∞-তে যাবে, অন্যজন $-\infty$-তে, কিন্তু $\{a_n+b_n\}_n$ একবার হবে convergent, একবার ∞-তে যাবে, একবার $-\infty$-তে যাবে, এবং একবার oscillate করবে। একই কাজ কর B, C আর D লেখা খোপগুলোর বেলাতেও। তার মানে সব মিলিয়ে তোমাকে $4\times 4=16$-টা উদাহরণ বানানোর চেষ্টা করতে হবে। সবগুলোই যে সম্ভব এমন বলছি না। লম্বা অংক, কিন্তু এই একটা অংক থেকে তুমি অনেক কাজের জিনিস শিখবে। ■

Exercise 13: একইরকম আরেকটা নামতার টেবিল যদি $\{a_n+b_n\}_n$-এর বদলে $\{a_nb_n\}_n$-এর জন্য বানাতে চাও, তবে প্রচুর কেস হয়ে যাবে। হাতে সময় থাকলে চেষ্টা করে দেখতে পারো। এমনটা কি সম্ভব যেখানে $a_n\to\infty$ আর $\{b_n\}_n$ হল convergent, অথচ $\{a_nb_n\}_n$ হল oscillating? ■

Oscillating sequence-দের সংজ্ঞা এইভাবে দেওয়া কঠিন, কারণ ওদের মূল পরিচয় এই যে ওরা দলছুট, প্রথম তিনটে দলে যারা পড়ে না, তাদের নিয়েই oscillating দলটা তৈরী। বস্তুতঃ oscillating sequence-রা অনেক ঝঞ্ঝাটের কারণ, এদের শায়েস্তা করার একটা কায়দা আমরা অষ্টম অধ্যায়ে শিখব। তার আগে আর এদের নিয়ে মাথা ঘামাব না।

Example 4: If a sequence $\{a_n\}_n$ converges to zero and also if the sequence $\{b_n\}_n$ is bounded then show that $\{a_nb_n\}_n$ converges to zero.[3] **(2001,2006)**

SOLUTION: প্রথমে অংকের ভাষায় লিখে নিই যে কি দেওয়া আছে--

Given:

- $a_n\to 0$, *i.e.*,
$$\forall\epsilon>0\quad\exists N\in\mathbb{N}\quad a_n\in N(0,\epsilon). \qquad (*)$$
- $\{b_n\}_n$ is bounded, *i.e.*,
$$\exists M>0\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad |b_n|\le M.$$

আর কি দেখাতে হবে--

To show: $a_nb_n\to 0$,

i.e,

$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n b_n \in N(0, \epsilon).$

প্রথমেই $\forall\epsilon > 0$ আছে, তাই--

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0.$

এবার $\exists N \in \mathbb{N}$ রয়েছে, তার মানে একটা যুৎসই N বার করতে হবে। একটু রাফ করে নিই। আমাদের শেষ পর্যন্ত দরকার $a_n b_n \in N(0, \epsilon)$, মানে $|a_n b_n| < \epsilon$. এদিকে বলা আছে যে $|b_n| < M$. তার মানে $|a_n| < \frac{\epsilon}{M}$ হলেই চলবে। এবং সেই কাজটা আমরা অনায়াসেই করতে পারব যদি n যথেষ্ট বড় নিই, কারণ $a_n \to 0$.

Putting $\frac{\epsilon}{M}$ in place of ϵ in (*),

$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n| < \epsilon/M.$

$\boxed{\exists N}$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

এইবার আছে $\forall n \geq N$. সুতরাং--

$\boxed{\forall n}$ Take any $n \geq N$.

 Then

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\epsilon}{M} \times M = \epsilon,$$

as required.

■

নীচের অংকটাও একই জিনিস। এখানে null sequence মানে এমন একটা sequence যেটা 0-তে converge করে।

Exercise 14: Prove that the product of a bounded sequence and a null sequence is a null sequence.[3] **(2012.3b)** ■

Example 5: If $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ then prove that $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Show by an example that the converse may not be true.[3] **(1998)**

SOLUTION: কি দেওয়া আছে?

Given: $a_n \to a$, *i.e.*,

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n \in N(a, \epsilon). \qquad (*)$$

আর কি দেখাতে হবে?

To show: $|a_n| \to |a|$, *i.e.*,

 $\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n| \in N(|a|, \epsilon).$

প্রথমেই $\forall\epsilon > 0$, তাই--

∀ε Take any $\epsilon > 0$.

এবার আছে $\exists N \in \mathbb{N}$. একটু রাফ করে দেখি কি ভাবে N পাওয়া যায়। আমাদের দরকার $|a_n| \in N(|a|, \epsilon)$, মানে $\big||a_n| - |a|\big| < \epsilon$. এখন n-কে যথেষ্ট বড় নিলে $|a_n - a|$-কে খুব ছোটো করা যাবে, এবং তাহলেই $\big||a_n| - |a|\big|$-ও ছোটো হবে কারণ triangle inequality বলছে যে $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$. সুতরাং $|a_n - a| < \epsilon$ করতে পারলেই হবে।

By (*), $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \epsilon$. ∃N Choose this N.

এরপর আছে $\forall n \geq N$, তাই--

Take any $n \geq N$.

Then $\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \epsilon$, as required.

অংকের দ্বিতীয় অংশের গোড়াতেই লিখে নিই যে converse statement-টা কি। মনে রেখো যে "এটা হলে ওটা হয়" জাতীয় statement-এর converse হল "ওটা হলে এটা হয়।"

<u>The converse statement:</u>

"If $|a_n| \to |a|$ then $a_n \to a$."

আশা করি বুঝতেই পারছ যে $|a_n|$-গুলো $|a|$-এর কাছে গেলেই a_n-গুলো a-র কাছে নাও যেতে পারে, যেমন যদি a_n-গুলো যায় -1-এ, আর $a = 1$ হয় তবে $|a_n|$-রা যাবে $|-1| = 1$-এ, কিন্তু ওই absolute চিহ্নটা সরিয়ে নিলেই দেখা যাবে যে $a_n \not\to a$.

This is false. A counterexample is

$$a_n \equiv -1, \quad a = 1.$$

Then $|a_n| \equiv 1 \to 1 = a$. But $\{a_n\}_n$ does not converge to a.

■

Example 6: Prove that if the sequence $\{x_n\}_n$ converges to ℓ then the sequence $\{|x_n|\}_n$ converges to $|\ell|$. When will the converse be true?[2+1] **(2013.3b)**

SOLUTION: প্রথম অংশটা আগের অংকেই করলাম। দ্বিতীয় অংশের জন্য প্রথমে converse-টা লিখে নেওয়া ভালো--

<u>Second part:</u> The converse is:

If $|x_n| \to |\ell|$ then $x_n \to \ell$.

এখানে সমস্যা কি হতে পারে? $|x_n| \to |\ell|$ হলে $|x_n| \to |-\ell|$-ও বটে, কারণ $|\ell| = |-\ell|$. সুতরাং যদি কেউ কোনো যুক্তি বার করে জোর দিয়ে বলে যে $x_n \to \ell$ হবেই, অমনি তুমি সেই একই যুক্তি দিয়ে $x_n \to -\ell$-ও দাবী করতে পারবে। তবে যদি $\ell = 0$ হয়, তবে সমস্যা নেই কারণ এই একটা ক্ষেত্রে $-\ell = \ell$. সুতরাং একটা উত্তর পেয়ে গেলাম--

This will be true if $\ell = 0$.

কিন্তু যদি $\ell \neq 0$ হয়? তবেও দেখতে হবে যেন x_n-গুলো $-\ell$-এর কাছে গিয়ে বেশী না ঘেঁসে। এখানে ℓ এবং $-\ell$-এর মাঝখানে রয়েছে 0. সুতরাং একটা পর্যায়ের পর থেকে x_n-গুলো যদি 0-র যেদিকে ℓ আছে সেদিকেই থাকে, তবে আমরা নিশ্চিন্ত যে ওরা $-\ell$-এর কাছে যেতে পারবে না--

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad x_n \text{ has same sign as } \ell.$$

■

DAY 2
বিভিন্ন শ্রেণীবিভাগের মধ্যে সম্পর্ক

যখন একই জিনিসের একাধিকভাবে শ্রেণীবিভাগ করা হয়, তখনই একটা স্বাভাবিক প্রশ্ন ওঠে--এদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কি না! যেমন জাতিগতভাবে জার্মানরা মানুষের একটা শ্রেণী, এবং গায়ের রঙের দিক দিয়ে সাদা চামড়ারা আরেকটা শ্রেণী। এদের মধ্যে একটা সম্পর্ক আছে-- জার্মানদের গায়ের রঙ সাদা হয়। আবার অনেক সময়ে এরকম কোনো সম্পর্ক থাকে না, কিন্তু আমরা ভুল করে সম্পর্ক কল্পনা করে ফেলি। ছোটো বেলাতে অনেকেরই এরকম বিশ্বাস থাকে যে সাহেবরা সবাই ইংরাজী বলে। সেটা মোটেই ঠিক নয়, ইউরোপের অনেক সাহেব আছে, তারা ইংরাজী কিচ্ছু জানে না! Sequence-দের ক্ষেত্রেও এরকম কিছু ভুল ধারণা অনেকের থাকে। এবার আমরা সেগুলো ভাঙব এবং sequence-দের বিভিন্ন শ্রেণীবিভাগের মধ্যে কিছু সম্পর্ক শিখব।

Exercise 15: অনেক ছাত্রের ধারণা থাকে যে strictly increasing sequence-রা সব সময়ে divergent to ∞ হয়। আমরা এতক্ষণ পর্যন্ত যতগুলো গ্রাফ দিয়েছি, তার থেকে এমন একটা sequence বার কর যেটা strictly increasing, কিন্তু divergent to ∞ নয়। ■

Exercise 16: আচ্ছা, একটা sequence যদি divergent to ∞ হয় তবে কি সেটা strictly increasing হতে বাধ্য? ■

Exercise 17: নীচে দুটো টেবিল রয়েছে। তোমার কাজ হল প্রতিটি খোপে একটা করে sequence লেখা। এখানে Bounded এবং Strictly decreasing-এর খোপে একটা উদাহরণ দেওয়াই আছে $\{\frac{1}{n}\}_n$, যেটা একই সঙ্গে bounded এবং strictly decreasing. প্রতিটি খোপেই এরকম উদাহরণ লেখার চেষ্টা কর। যদি কোনো ক্ষেত্রে অসম্ভব মনে হয় তবে সেই খোপে ক্রস্ বসিও।

	Strictly decr	Non decr	Non incr	Strictly incr	Non monotone
Bounded	$\{\frac{1}{n}\}_n$				
Unbounded					

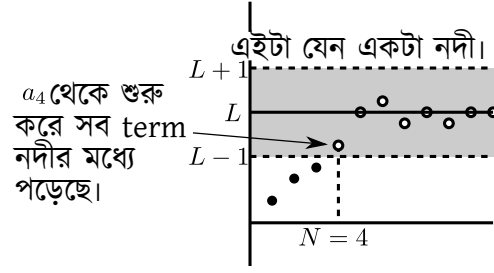



Fig 16

■

Example 7: Prove that every convergent sequence in $\mathbb{R}$ is bounded. Is the converse true? Justify.[2+1] **(2002,2008)**

SOLUTION: অংকটার প্রথম অংশে দেখাতে বলেছে যে, কোনো sequence যদি convergent হয় তবে তা bounded-ও হবে।

কি দেওয়া আছে লিখে নিই--

Let $\{a_n\}_n$ be a convergent sequence,

i.e.,

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n \in N(L, \epsilon).$$

তারপর লিখি কি দেখাতে হবে--

To show: $\{a_n\}_n$ is a bounded sequence,

i.e.,

$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| < M.$

এবার Fig 16 দ্যাখো। যেহেতু $a_n \to L$ তাই একটা কোনো N-এর পর থেকে a_n-গুলো $N(L, 1)$-এ ঢুকে যাবে--

Taking $\epsilon = 1$ in the given condition,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n \in N(L, 1).$$

যে কোনো $\epsilon > 0$ নিলেই চলত, তা আমরা $\epsilon = 1$ নিয়েছি।

$\therefore \forall n \geq N \quad a_n < L+1$ and $L-1 < a_n$.

সাদা বিন্দুগুলোর bounded হওয়া নিয়ে তো কোনো প্রশ্নই নেই, কারণ ওরা নদীর দুই পাড়ের মধ্যে বন্দী।

So $\forall n \geq N \ |a_n| < \max\{|L-1|, |L+1|\}$.

তাহলে বাকী রইল মোটে কয়েকটা কালো a_n : এরা হল $a_1, ..., a_{N-1}$. এদেরকে bound করতেও কোনো অসুবিধে নেই, কারণ এরা সংখ্যায় finite. তাই $\max\{|a_1|, ..., |a_{N-1}|\}$ দিয়েই কাজ চলে যাবে।

$\exists M$ Choose

$$M = \max\left\{|L-1|, |L+1|, |a_1|, ..., |a_{N-1}|\right\} > 0.$$

$\forall n$ Take any $n \in \mathbb{N}$.

If $n < N$, then $|a_n| \leq M$.
Also, if $n \geq N$, then

$$|a_n| < \{\ |L-1|\ ,\ |L+1|\ \} \leq M.$$

So $\{a_n\}_n$ is a bounded sequence, as required.

দ্বিতীয় অংশ হল converse নিয়ে। যখনই converse-ঘটিত কিছু প্রশ্ন আসবে, আমাদের উচিত প্রথমেই converse statement-টা লিখে নেওয়া। তাহলে নিজের কাছে স্পষ্ট থাকবে যে আমরা ঠিক কি দেখাতে চলেছি বা ভুল প্রমাণ করতে চাইছি।

The converse statement:
Every bounded sequence in $\mathbb{R}$ is convergent.

চট্ করে ভেবে নিই একটা sequence কি কি ধরণের হতে পারে--হয় convergent নয় divergent (to ∞ বা $-\infty$) আর নয় তো oscillating. আমাদের sequence-টা যেহেতু bounded বলা আছে, তাই divergent হওয়ার পথ বন্ধ। কিন্তু তার মানেই sequence-টা converge করবে এমন কোনো কথা নেই, কারণ oscillating হতে তো বাধা নেই!
সুতরাং একটা oscillating sequence নিলেই counterexample হবে। এই রকম একটা sequence দেখানো হয়েছে Fig 17-এ। এটা ক্রমাগতঃ 1 আর -1-এর মধ্যে লাফিয়ে চলেছে।

Fig 17

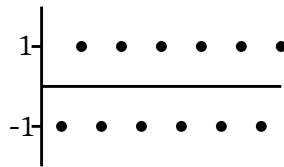
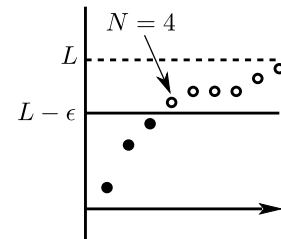



Fig 18

This statement is false. For example, take

$$a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Then $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \in [-1, 1]$. But $\{a_n\}_n$ does not converge.

■

এইবার যেটা প্রমাণ করব সেটা অত্যন্ত দরকারী একটা জিনিস। ভবিষ্যতে বারবার কাজে আসবে।

Example 8: Prove that every monotone nondecreasing sequence if bounded above is convergent and converges to the least upper bound.[3] **(2000)**

SOLUTION: প্রথমে একটা nondecreasing sequence নিয়ে শুরু করি যেটা bounded from above–

Let $\{a_n\}_n$ be a nondecreasing sequence bounded from above.

একথাটার মানে বোঝার জন্য Fig 18 দ্যাখো। এখানে বিন্দুগুলো ক্রমশঃ উঁচুতে উঠছে (বা একই উচ্চতায় থাকছে), কিন্তু কখনো নামছে না। তাই এটা একটা nondecreasing sequence. শুধু তাই নয়, এটা bounded above-ও বটে অর্থাৎ, এর মাথার ওপর একটা ছাদ আছে, যার ওপরে বিন্দুগুলো কখনো যাবে না। ছবিতে ড্যাশ্ ড্যাশ্ দিয়ে একটা ছাদ দেখানো হয়েছে।

Thus, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$
and $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M$.

তারপর লিখে নিই কি দেখাতে হবে--

To show: $a_n \to L$, where $L = \sup\{a_n\}$,

এই sup-টা কেন exist করে? কারণ, $\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ হল একটা nonempty set যেটা bounded from above.

which exists by the least upper bound axiom, since $\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ is nonempty and bounded from above.

এইবার আবার প্রমাণিতব্য বিষয়ে ফিরে আসি--

Thus, to show:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n \in N(L, \epsilon).$$

গোড়াতেই $\forall \epsilon > 0$ আছে, তাই--

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার $N \in \mathbb{N}$ বার করতে হবে। এরজন্য একটু চিন্তা করে নিই। যেহেতু $L = \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, সুতরাং a_n-গুলো বাড়তে বাড়তে L-এর একেবারে কাছ পর্যন্ত চলে আসবে। এদিকে একবার L-এর কাছে উঠে এলে আর তো নেমে যেতে পারবে না, কারণ a_n-গুলো nondecreasing. সুতরাং যেই একটা a_n একবার L-এর কাছে চলে আসবে অমনি পরের a_n-গুলোও L-এর কাছে থাকতে বাধ্য! এই কথাটাকেই এবার অংকের ভাষায় লিখব। Fig 18 দ্যাখো।

$\because L = \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$,

$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad a_N > L - \epsilon$.

Choose this N.

ব্যস্‌, a_N এসে গেছে $N(L, \epsilon)$-এর নাগালের মধ্যে। ছবিতে যেমন $N = 4$. এরপরের a_n-গুলো আর নেমে যেতে পারবে না, কারণ a_n-রা nondecreasing. যে a_n-গুলো $L - \epsilon$-এর ওপরে আট্‌কা পড়ে গিয়েছে তাদেরকে আমরা সাদা করে এঁকেছি। $L - \epsilon$-এর ওপরে ওঠার আগে পর্যন্ত বিন্দুগুলো কালো।

Take any $n \geq N$.

$\because \{a_n\}_n$ is nondecreasing,

$$\therefore a_n \geq a_N > L - \epsilon.$$

Also, $\because L$ is an upper bound, $\therefore a_n \leq L$.

So $a_n \in (L - \epsilon, L] \subseteq N(L, \epsilon)$, as required.

■

Exercise 18: Show that a monotonically increasing sequence of real numbers is convergent if the sequence is bounded above.[3] **(2004)**

HINT:

আগের অংকটাই, খালি non-decreasing না বলে increasing বলেছে। ■

Exercise 19: Prove that a necessary and sufficient condition for the convergence of a monotone sequence is that it is bounded.[4] **(1998,2002)**

HINT:

একটা monotone sequence bounded হলে যে converge করে, সেটা আমরা ?? নম্বর অংকেই দেখিয়েছি। বস্তুতঃ আমরা সেখানে nondecreasing sequence bounded from above নিয়ে কাজ করেছি, কিন্তু ঠিক একই ভাবে nonincreasing sequence bounded from below নিয়েও কাজ করা যাবে।

আর convergent sequence মাত্রেই যে bounded হয় সেটা দেখানো হয়েছে ?? নম্বর অংকে। ■

আমাদের বিভিন্ন আলোচনা মিলিয়ে তৈরী নীচের অংকটা।

Example 9: Correct or justify: A monotone decreasing sequence cannot oscillate.[5] **(2013.3a)**

SOLUTION: একটা sequence যদি decreasing হয় তবে হয় সেটা কমতে কমতে একেবারে $-\infty$-র দিকে ছোটে, আর নয় তো bounded below হয়, এবং সেক্ষেত্রে converge করে। সুতরাং--

This statement is correct.

কি করতে চলেছি লিখে নিই--

A sequence $\{x_n\}_n$ is said to oscillate if it does not converge and $x_n \not\to \infty$ and $x_n \not\to -\infty$.
Let $\{x_n\}_n$ be a monotone decreasing sequence.
We shall show that either $x_n \to -\infty$ or $\{x_n\}_n$ converges.

দুটো কেস হবে, bounded from below আর unbounded below. প্রথম কেসের যুক্তিটা আমরা একটু আগেই (??) নম্বর অংকে দিয়েছি। ওখানে nondecreasing দেওয়া ছিল, তাই sup নিয়ে কাজ করেছিলাম, এখানে decreasing দিয়েছে তাই inf-এর খেলা। শুরুটা ধরিয়ে দিই--

এই কেসের বাকিটা (??) নম্বর অনুকরণে নিজে করো।
দ্বিতীয় কেসটা আরো সহজ--

Case 2: If $\{x_n\}_n$ is unbounded below,
then shall show $x_n \to -\infty$, ie
$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad x_n \leq M$.
$\forall M$ Take any $M \in \mathbb{R}$.
$\because \{x_n\}_n$ is unbounded below,
$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad x_N < M$.
$\exists N$ Choose this N.
$\forall n$ Take any $n \geq N$.

x_N-ই যদি M-এর নীচ চলে যায়, তবে x_n-ও যাবেই, কারণ sequence-টা যে decreasing!

Then, $\because \{x_n\}_n$ is decreasing,
$\therefore x_n \leq x_N < M$.
Thus $\therefore x_n \leq M$, as required.

■

2.1 Some problems

Example 10: If a sequence of real numbers $\{a_n\}_n$ converges to 0, prove that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = 0.$$

[3] **(2001)**

SOLUTION: এই অংকটায় কি দেখাতে হবে বুঝে নিই। প্রথমে একটা sequence দেওয়া আছে $\{a_n\}_n$, যেটা 0-র দিকে যাচ্ছে। এবার এই সংখ্যাগুলোর average (গড়) বার করা হল, প্রথমে ছিল খালি a_1, তার average-ও a_1. তার পর এল a_2, এদের দুজনের average হল $\frac{a_1+a_2}{2}$, তারপর এল a_3, এবং এই তিনজনের মিলিত average হল $\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$, এই রকম। দেখাতে হবে যে এই average-গুলোও 0-র দিকে যাবে।
প্রমাণটা করার জন্য লক্ষ কর যে যদি কিছু সংখ্যা নিই যারা সবাই 0-র খুব কাছে (ধর -0.01 থেকে 0.01-এর মধ্যে) তবে তাদের average-ও -0.01 থেকে 0.01-এর মধ্যে থাকবে। আমাদের অংকে অবশ্য বলে দেয় নি সবগুলো a_n-ই 0-র খুব কাছে, খালি বলেছে $a_n \to 0$. অর্থাৎ n যথেষ্ট বড় নিলে তবে a_n-গুলো 0-র কাছে আসবে। গোড়ার দিকের a_n-গুলো কিন্তু 0-এর থেকে বেয়াড়ারকমের দূরে থাকতেও পারে। এই কথাটা মাথায় রেখে অংকটা শুরু করি।

Given: $a_n \to 0$. *i.e.*,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n| < \epsilon. \tag{*}$$

Let $b_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.
To Show: $b_n \to 0$,
i.e.,

◎ $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |b_n| < \epsilon.$

প্রথমেই $\forall \epsilon > 0$ আছে, তাই--

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এরপরে আছে $\exists N \in \mathbb{N}$. একটা যুৎসই N পাওয়ার জন্য আমরা a_n-গুলোকে দুইদলে ভাগ করব। যখন n খুব বড় হবে তখন a_n-গুলো 0-র ভদ্ররকম কাছে থাকবে। এদের নিয়ে হবে প্রথম দল। আর অন্যদলে থাকবে গোড়ার দিকের a_n-গুলো যাদের সম্বন্ধে এই গ্যারান্টী নেই (অর্থাৎ যারা 0 থেকে বেয়াড়ারকমের দূরে থাকতেও পারে)।

Now, putting $\frac{\epsilon}{2}$ in place of ϵ in (*), we get $N_1 \in \mathbb{N}$ such that

$$\forall n \geq N_1 \quad |a_n| < \epsilon/2.$$

তার মানে ভদ্র দলে রইল $a_{N_1}, a_{N_1+1}, \ldots$ আর অভদ্র দলে রইল $a_1, a_2, \ldots, a_{N_1-1}$. লক্ষ কর যে ভদ্রলোকেরা অসংখ্য, কিন্তু অভদ্রদের সংখ্যা finite. এইবার আমরা অভদ্রলোকদের টিট করব।

Take $N_2 \in \mathbb{N}$ such that

$$\frac{|a_1 + \cdots + a_{N_1-1}|}{N_2} < \epsilon/2. \tag{**}$$

$\boxed{\exists N}$ Choose $N = \max\{N_1, N_2\}$.

এইবার আছে $\forall n \geq N$, তাই--

$\forall n$ Take any $n \geq N$.

Then

$$
\begin{aligned}
& |b_n| \\
= \; & \frac{|a_1 + \cdots + a_n|}{n} \\
\leq \; & \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_1-1}|}{n} + \frac{|a_{N_1} + \cdots + a_n|}{n} && \left[\text{by triangle inequality}\right] \\
\leq \; & \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_1-1}|}{N_2} + \frac{|a_{N_1} + \cdots + a_n|}{n} && [\because n \geq N \geq N_2] \\
< \; & \tfrac{\epsilon}{2} + \frac{|a_{N_1} + \cdots + a_n|}{n} && [\text{by } (**)] \\
\leq \; & \tfrac{\epsilon}{2} + \frac{|a_{N_1}| + \cdots + |a_n|}{n} && \left[\text{by triangle inequality}\right] \\
\leq \; & \tfrac{\epsilon}{2} + \frac{(n - N_1 + 1)\epsilon}{2n}
\end{aligned}
$$

কারণ $|a_{N_1}|, ..., |a_n|$ প্রত্যেকেই $< \frac{\epsilon}{2}$, এবং এরা মোট $n - N_1 + 1$ জন আছে।

$$
\begin{aligned}
\leq \; & \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} \quad [\because N_1 \geq 1] \\
= \; & \epsilon,
\end{aligned}
$$

as required.

■

Exercise 20: If $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$, show that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \ell.$$

[3] **(2010.4b)**
HINT:
আগের অংকটাই, খালি 0-র জায়গায় ℓ. ■

DAY 3
Recurrence relation

অনেক সময়ে একটা sequence-কে recurrence relation দিয়ে প্রকাশ করা হয় যেমন--

$$a_n = 2a_{n-1} - 1.$$

এবার যদি বলে দিই যে, $a_1 = 2$ তবে এ থেকে তুমি পুরো sequence-টা বার করে ফেলতে পারবে। যেমন, $n = 2$ বসিয়ে $a_2 = 2a_1 - 1 = 3$, তারপর $n = 3$ বসিয়ে $a_3 = 2a_2 - 1 = 5$, এই রকম। লক্ষ কর যে, a_1 যদি অন্য কিছু হত, তবে একই recurrence relation কিন্তু সম্পূর্ণ অন্য sequence-এর জন্ম দিত।

Exercise 21: যদি $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1}$ হয় এবং $a_1 = 1$ হয়, তবে a_2, a_3 আর a_4 কি হবে? ■

আমরা যে কটা recurrence relation-এর উদাহরণ দেখলাম তারা সবাই first order, কারণ এখানে একটা term-কে তার আগের term-টা দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে। যদি আগের দুটো term ব্যবহার করতাম তবে পেতাম second order recurrence relation, যেমন--

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

বুঝতেই পারছ যে, এরকম recurrence relation ব্যবহার করার জন্য খালি a_1 জানলেই হবে না, a_2-ও লাগবে।
নীচের অংকগুলোতে আমাদের একটা করে recurrence relation দেওয়া থাকবে। তার ভিত্তিতে আমরা বোঝার চেষ্টা করব sequence-টা bounded বা monotone বা convergent কি না।
এই প্রসঙ্গে কয়েকটা কায়দা শিখে রাখা ভালো। প্রথমতঃ, যদি জানি যে sequence-টা convergent, ধর $a_n \to L$, তবে recurrence relation-এর দুই পাশের limit নিলে L-এর সম্ভাব্য কিছু value পাওয়া যায়।

Example 11: ধর $a_{n+1} = a_n^2$. যদি বলে দিই যে $a_n \to L$, তবে L-এর value কি কি হতে পারে?

SOLUTION: দুই দিকে limit নিলে হয় $L = L^2$, মানে $L = 0, 1$. সুতরাং limit হবে হয় 0 বা 1.
এর মানেই কিন্তু এই নয় যে sequence-টা 0 বা 1-এ converge করবেই। এর মানে খালি এই যে যদি আদৌ converge করে, তবে limit-টা হবে 0 বা 1. কিন্তু হতেই পারে যে sequence-টা oscillate করে, বা diverge করে। এমনও হতে পারে যে x_1-এর কোনো value-র জন্য 0-তে converge করে, আবার অন্য কোনো value-র জন্য 1-এ converge করে। ■

দ্বিতীয় কায়দা হল এই--যদি $\{a_n\}_n$-কে bounded দেখাতে হয়, তবে আগে একটা lower bound আর upper bound আন্দাজ কর। তারপর সরাসরি দেখাও যে a_1 সত্যই সেই bound-এর মধ্যে আছে। তারপর induction লাগাও, মানে a_n-টা bound-এর মধ্যে আছে ধরে নিয়ে প্রমাণ কর যে, a_{n+1}-ও bound-এর মধ্যে থাকতে বাধ্য।

Example 12: ধর $a_{n+1} = a_n^2$ আর $0 < a_1 < 1$. দ্যাখাও যে $\{a_n\}_n$ একটা bounded sequence.

SOLUTION: $(0, 1)$ এর মধ্যে কোনো সংখ্যার square-ও $(0, 1)$-এর মধ্যেই থাকে। তাই আন্দাজ করা কঠিন নয় যে 0 হবে একটা lower bound, আর 1 হবে একটা upper bound. a_1-এর বেলায় তো বলেই দিয়েছে যে, $0 < a_1 < 1$. এবার ধরে নিই যে, $0 < a_n < 1$. তাহলে $0 < a_n^2 < 1$, মানে $0 < a_{n+1} < 1$. সুতরাং পুরো sequence-টাই bounded. ■

তৃতীয় কায়দাটা হল recurrence relation থেকে বলতে পারা যে sequence-টা monotone কিনা। এর জন্য প্রথম কাজ হল কিছু উদাহরণ নিয়ে বা অন্যভাবে আন্দাজ করা যে sequence-টা increasing না কি decreasing. তার পর recurrence relation-টাকে একটু সাজিয়ে এমন ভাবে লিখতে হবে যেন এক দিকে $a_{n+1} - a_n$ থাকে। এই অবস্থায় অন্যদিকটাকে ≥ 0 (বা decreasing-এর বেলায় ≤ 0) দেখাতে হবে। সাধারণতঃ, sequence-টার কোনো bound জানা থাকলে এই কাজটা করতে সুবিধা হয়।

Example 13: ধর $a_{n+1} = a_n^2$ আর $0 < a_1 < 1$. দ্যাখাও যে $\{a_n\}_n$ একটা monotone sequence.

SOLUTION: কিছু উদাহরণ (যেমন $a_1 = \frac{1}{2}$) নিয়ে কয়েকটা term বার করে দেখলেই বুঝবে যে sequence-টা decreasing.
এবার recurrence relation-টার দুই দিক থেকে a_n বিয়োগ করলে হয় $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n = a_n(a_n - 1)$.
আগের অংকেই দেখেছিলাম $0 \leq a_n \leq 1$. তাই $a_n(a_n - 1) \leq 0$.
সুতরাং $a_{n+1} - a_n \leq 0$, অর্থাৎ sequence-টা সত্যই decreasing. ■

Example 14: If $x_1 = \sqrt{6}$ and $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$, $n = 1, 2, 3, ...$, show that $\{x_n\}_n$ is monotonically increasing.[3] **(2004)**

SOLUTION:

Shall show by induction on n that

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} > x_n.$$

Basis For $n = 1$, $x_2 = \sqrt{x_1 + 6} = \sqrt{\sqrt{6} + 6} > \sqrt{6} = x_1$.

Hyp Assume the result for $n = 1, ..., m - 1$.

Step Shall show for $n = m$,

ie., $x_{m+1} > x_m$,

ie., $\sqrt{x_m + 6} > \sqrt{x_{m-1} + 6}$,

ie., $x_m + 6 > x_{m-1} + 6$,

ie., $x_m > x_{m-1}$, which is true by the induction hypothesis.

Thus the result is proved by the principle of mathematical induction.

■

এইবার কয়েকটা অংক দেখব যেখানে আমাদের কায়দা তিনটে বারবার লাগবে। এই সবগুলো অংকেরই মূল ব্যাপারটা এক--একটা recurrence relation দেওয়া থাকবে, তা থেকে প্রথমে limit-টা আন্দাজ করতে হবে প্রথম কায়দা লাগিয়ে, তারপর দেখাতে হবে যে sequence-টা bounded আর monotone. সুতরাং sequence-টা converge করতে বাধ্য। অতএব গোড়ায় যে limit-টা আন্দাজ করেছিলাম সেটাই হবে সত্যিকারের limit.

Example 15: Let the sequence $\{x_n\}_n$ of real numbers be defined by the recurrence relation

$$x_{n+1} = x_n(2 - x_n) \text{ for all } n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x_1 < 1.$$

Show that the sequence is convergent. Find the limit of the sequence.[4+1] **(2009)**

SOLUTION: যদি $x_n \to L$ হত, তবে প্রথম কায়দা লাগিয়ে পাই $L = 0$ বা 1.

এবার একটা উদাহরণ নিয়ে দেখি। ধর $x_1 = \frac{1}{2}$ নিলাম। তবে $x_2 = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$, হবে। তার পরে আসবে $x_3 = \frac{3}{4}(2 - \frac{3}{4}) = \frac{15}{16}$. লক্ষ কর যে x_n-গুলো বাড়তে বাড়তে 1-এর দিকে চলেছে। x_1 যদি অন্য কিছু নিতাম (ধর $\frac{1}{3}$) তাহলেও একই রকম আচরণ দেখতে পেতে। সুতরাং আমরা আন্দাজ করতে শুরু করছি যে বোধহয় যেকোনো $0 < x_1 < 1$-এর জন্যই x_n-গুলো বাড়তে বাড়তে 1-এ converge করবে।

তাহলে $0 < x_n < 1$ হবে। দ্বিতীয় কায়দা লাগিয়ে দেখি সেটা প্রমাণ করা যায় কি না--

Shall show by induction on n that

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < x_n < 1.$$

Basis For $n = 1$ it is given.

Hyp We assume the result for some n.

Step | Shall show $0 < x_{n+1} < 1$.

এটাকে দুভাগে ভেঙে দেখাব--$0 < x_{n+1}$ আর $x_{n+1} < 1$.

To show $0 < x_{n+1}$,
i.e., $0 < x_n(2 - x_n)$,
which is true since $0 < x_n < 1$.

এবার দেখাব $x_{n+1} < 1$.

Shall show $x_{n+1} < 1$, *i.e.*, $x_n(2 - x_n) < 1$,
i.e., $0 < 1 - 2x_n + x_n^2 = (1 - x_n)^2$, which is true, $\because x_n < 1$.

এবার দেখাব যে sequence-টা increasing-ও বটে।

Also, $x_{n+1} - x_n = x_n(2 - x_n) - x_n = x_n - x_n^2 = x_n(1 - x_n) > 0$, since $0 < x_n < 1$.

তার মানে $\{x_n\}_n$ একটা increasing এবং bounded sequence. এরকম sequence তো converge করতে বাধ্য।

Since any monotone bounded sequence converges, so $\{x_n\}_n$ is convergent.

এবার limit-টা বার করার অপেক্ষা--

Let $L = \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$.
Taking limit of both sides of the recurrence relation we have

$$L = L(2 - L)$$
$$\text{or,} \qquad L(L - 1) = 0.$$

Thus either $L = 0$ or $L = 1$.
Now $\{x_n\}_n$ is an increasing sequence with $x_1 > 0$. So $L \neq 0$.
Hence the required limit is $L = 1$.

■

Example 16: Discuss the convergence of the sequence $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, where

$$S_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + S_n^2}{a+1}}, \quad b > a,$$

for all $n \geq 1$ and $S_1 = a > 0$.[5] **(2010.7)**
SOLUTION: এই খানেও ঠিক আগের অংকের মতই এগোব। লক্ষ কর $S_n \geq 0$ হবেই যেহেতু positive square root ব্যবহার করা হয়েছে। যদি ধরে নিই যে $S_n \to L$ হবে তাহলে

$$L = \sqrt{\frac{ab^2 + L^2}{a+1}},$$

এবং সেখান থেকে $L^2 = b^2$. যেহেতু $S_n \geq 0$, তাই $L \geq 0$ হবেই। অতএব $L = b$. এবার দেখি sequence-টা monotone আর bounded হয় কি না। বলেছে যে $S_1 = a < b$. তার মানে b-র বাঁদিক থেকে শুরু হয়েছে। যদি decreasing sequence হত তবে তো আরও বাঁদিকে চলে যেত, b-তে converge করত না। তার মানে decreasing হতে পারে না। তাহলে দেখি increasing হতে পারে কি না। ধর দেখিয়েছি যে $0 \leq S_n < b$. তাহলে লক্ষ কর

$$S_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + S_n^2}{a+1}} \leq \sqrt{\frac{ab^2 + b^2}{a+1}} = \sqrt{b^2} = b.$$

সুতরাং (induction লাগিয়ে) S_n-রা সবাই $\leq b$. আরও লক্ষ কর

$$S_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + S_n^2}{a+1}} > \sqrt{\frac{aS_n^2 + S_n^2}{a+1}} = \sqrt{S_n^2} = S_n.$$

ওই $\geq$-টাও কিন্তু প্রমাণ করতে হবে। ব্যস্, এর চেয়ে বেশী আর কিছু বলব না। এবার আগের অংকের আদলে এই অংকটা কর দেখি! ■

Example 17: A sequence $\{x_n\}_n$ is defined by $x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$, $n > 1$, and $x_1 = \sqrt{2}$. Show that the sequence is monotonically increasing and bounded above. Find the limit of the sequence.[4] **(1999)**

SOLUTION: প্রথম কায়দাটা লাগিয়ে দ্যাখো যে $x_n \to L$ হলে $L = 2$ হতে বাধ্য। x_2, x_3 ইত্যাদি কয়েকটা term বার করলেই বুঝবে sequence-টা increasing. তার মানে আমাদের এটা দেখালেই চলবে যে যাবতীয় x_n-ই ≤ 2. সেই সঙ্গে এও দেখাতে হবে যে x_n-গুলো বাড়ছে।

> We shall show using induction that
>
> $$\forall n \geq 1 \quad 0 \leq x_n \leq 2. \qquad (*)$$
>
> **Basis** For $n = 1$ we have $x_1 = \sqrt{2} \in (0, 2)$.
> **Hyp** Assume $(*)$ for some n.
> **Step** Shall show $(*)$ for $n + 1$.
> Clearly, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \geq 0$.
> Also
>
> $$\begin{aligned} 2 - x_{n+1} &= 2 - \sqrt{2x_n} \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{x_n}) \\ &\geq 0 \quad [\because x_n \leq 2 \text{ by induction hypothesis}] \end{aligned}$$

যে কোনো induction-ওয়ালা প্রমাণের উপসংহার হয় এইভাবে--

> Hence, by the principle of mathematical induction, we have proved $(*)$ for all $n \leq 1$.

এবার increasing দেখাব--

Also

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sqrt{2x_n} - x_n \\ &= \sqrt{x_n}(\sqrt{2} - \sqrt{x_n}) \\ &\geq 0 \quad [\because 0 \leq x_n \leq 2] \end{aligned}$$

এইবার x_n-এর limit বার করব। রাফ্ থেকে তো আগেই জেনে গিয়েছি যে limit-টা হল 2. এবার ওই রাফ্টাকেই গুছিয়ে লিখে দেব।

$\because \{x_n\}_n$ is bounded and monotone,
$\therefore x_n \to L$ for some $L \in \mathbb{R}$.
Taking limit of both sides of

$$x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$$

we have

$$\lim x_n = \lim \sqrt{2x_{n-1}} = \sqrt{2 \lim x_{n-1}},$$

So $L = \sqrt{2L}$, or $L = 2$, which is the required limit.

■

Example 18: Prove that the sequence $\{x_n\}_n$ defined by $x_1 = \sqrt{7}$ and

$$x_{n+1} = \sqrt{7 + x_n}$$

converges to the positive root of the equation $x^2 - x - 7 = 0$.[4+1] **(2011,2007)**
SOLUTION: এইটা ঠিক আগের অংকটারই মত, তিন ধাপে করা যায়। প্রথম ধাপে দেখাব যে $\{x_n\}_n$ হল bounded above–

Let $\alpha = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$ be the positive root of the given equation.
Step 1: Shall show $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq \alpha$.

Basis To show $x_1 = \sqrt{7} \leq \alpha$,
i.e., $2\sqrt{7} - 1 \leq \sqrt{29}$,
i.e., $\sqrt{28} - 1 \leq \sqrt{29}$, which is obvious.

Hyp Assume for some n.

Step To show $x_{n+1} \leq \alpha$,
i.e., $\sqrt{7 + x_n} \leq \alpha$,
i.e., $7 + x_n \leq \alpha^2 = 7 + \alpha$, which is true since $x_n \leq \alpha$ by induction hypothesis.

দ্বিতীয় ধাপে দেখাব যে $\{x_n\}_n$ হল nondecreasing–

Step 2: Shall show that
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \geq x_n.$$

Basis For $n = 1$
$$x_2 = \sqrt{7 + x_1} = \sqrt{7 + \sqrt{7}} \geq \sqrt{7} = x_1,$$
since $\sqrt{7} \geq 0$.

Hyp We assume the result for some $n \geq 1$.

Step Shall show for $n + 1$.

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_{n+1} &= \sqrt{7 + x_{n+1}} - \sqrt{7 + x_n} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

since $x_{n+1} \geq x_n$ by induction hypothesis.
Thus, $x_{n+2} \geq x_{n+1}$, as required.

এই দুই ধাপ থেকে সিদ্ধান্ত করতে পারি যে $\{x_n\}_n$ converge করে। এবার তৃতীয় ধাপে এই limit-টা বার করব।

Step 3: Since a bounded monotonic sequence converges, so let $L = \lim_n x_n \in \mathbb{R}$.
Taking limit of both sides of
$$x_{n+1} = \sqrt{7 + x_n}$$
we have $L = \sqrt{7 + L}$ or
$$L^2 - L - 7 = 0.$$
Since $\forall n \quad x_n \geq 0$, hence $L \geq 0$.
So L must be the positive root of $x^2 - x - 7 = 0$, as required.

■

Example 19: Prove that the sequence $\{x_n\}_n$ defined by
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$$
for all $n \geq 1$, $\alpha > 0$, and $x_1 \geq \sqrt{\alpha}$ is a convergent sequence. Find the limit.[4+1] **(2007.4b)**
SOLUTION: এটাও আগের অংকটারই মত আরেকটা তিন ধাপের অংক। প্রথম ধাপে দেখাব যে $\{x_n\}_n$ হল bounded from below–

Step 1: Shall show that $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 0$.

Basis For $n = 1$, we have $x_1 \geq \sqrt{\alpha} > 0$.

Hyp Assume $x_n > 0$ for some $n \geq 1$.

Step Then $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) > 0$.

So by induction we have $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 0$.

আসলে আমরা দেখাতে পারি যে $x_{n+1} \geq \sqrt{\alpha}$ হবে। সেটা এক্ষুণি কাজে লাগবে--

Shall show $x_{n+1} \geq \sqrt{\alpha}$,

i.e., $\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) \geq \sqrt{\alpha}$,

i.e., $\because x_n > 0$,

$x_n^2 - 2x_n\sqrt{\alpha} + \alpha \geq 0$,

i.e., $(x_n - \sqrt{\alpha})^2 \geq 0$, which is true.

দ্বিতীয় ধাপে দেখাব যে $\{x_n\}_n$ একটা nonincreasing sequence–

Step 2: Shall show that $\{x_n\}_n$ is a nonincreasing sequence,

i.e., $x_{n+1} \leq x_n$

i.e., $\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) \leq x_n$

i.e., $\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{x_n}\right) \leq \frac{1}{2}x_n$

i.e., $\frac{\alpha}{x_n} \leq x_n$, which is true $\because x_n \geq \sqrt{\alpha}$.

এই দুই ধাপ থেকে সিদ্ধান্ত যে $\{x_n\}_n$ converge করে। এবার সেই limit-টা বার করা--

Step 3: Thus $\{x_n\}_n$ converges to some limit $L \in \mathbb{R}$, say. Being limit of a nonnegative sequence, $L \geq 0$.

Taking limit of both sides of

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right),$$

we get

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{\alpha}{L}\right),$$

or $L = \sqrt{\alpha}$, which is the required answer.

■

DAY 4
Nested intervals

এবার আমরা এমন একটা জিনিস শিখব যেটা তুমি খুব ভালো করেই জানো, অথচ প্রথমটায় সেই অতি পরিচিত জিনিসটাকে চিনতেই পারবে না। প্রথমেই পরিচিত নামটা বলব না, অপরিচিত নামটা হল--Nested Interval Theorem বা Cantor Intersection Theorem.

Example 20: State the nested interval theorem regarding a sequence of closed and bounded intervals in $\mathbb{R}$. Is the result true if the sequence of closed intervals is replaced by a sequence of open intervals, the other condition(s) remaining the same?[1+2] **(2009)**

SOLUTION:

Nested interval theorem

Let $\{I_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ be a sequence of closed, bounded intervals with $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$.
Then

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \phi.$$

If, further, length of $I_n \to 0$ as $n \to \infty$, then

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ is a singleton set.}$$

ভাবতে পারো এই খটমট জিনিসটা আসলে আমরা অতি পরিচিত একটা কাজ করতে হামেশাই ব্যবহার করি? কিন্তু তার আগে খটমট জিনিসটা একটু ছবি দিয়ে বোঝা যাক। Fig 19-এ দ্যাখো চারটে closed, bounded interval রয়েছে, একটার ভিতরে একটা। I_1-এর পেটে I_2, তার পেটে I_3, এইরকম। এভাবে একটার পেটে একটা পরপর ঢুকে থাকাকে ইংরাজিতে বলে "nesting". প্রশ্ন হল এইভাবে যদি চলতেই থাকে তবে সবচেয়ে ভিতরে কি থাকবে, মানে $\cap_n I_n$ কি হবে? এই প্রশ্নের উত্তরটাই হল nested interval theorem, যেটা বলছে যে, $\cap_n I_n \neq \phi$ হবে, অর্থাৎ interval-গুলো কমতে কমতে বেমালুম শূন্যে মিলিয়ে যেতে পারে না। শুধু তাই নয়, যদি I_n-গুলোর দৈর্ঘ্য ক্রমশঃ শূন্যের দিকে যায়, তবে $\cap_n I_n$-এর ভিতর খালি একটাই point থাকতে পারে।
এবার প্রশ্নের দ্বিতীয় অংশ। I_n-গুলো closed না হলে result-টা ঠিক নয়। আমরা একটা উদাহরণ দিয়ে এটা দেখাব (Fig 20). এরকম যে উদাহরণ দিয়ে কোনো কিছুকে ভুল দেখানো হয়, তাকে বলে একটা counterexample.

Fig 19

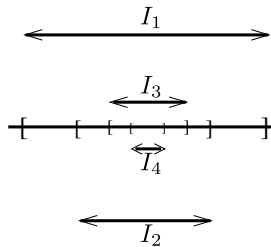
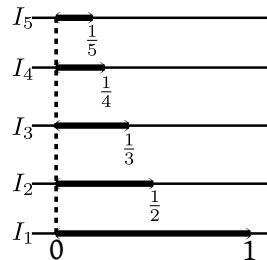



Fig 20

No, this result does not hold if the I_n's are not closed. As a counterexample, take

$$I_n = \left(0, \tfrac{1}{n}\right).$$

Then

$$\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi,$$

একটু চিন্তা করলেই বুঝবে কেন intersection-টা ϕ হচ্ছে। কারণ interval-গুলো ক্রমশঃই ছোটো হচ্ছে, ফলে positive সব সংখ্যাই একে একে বাদ পড়ে যাচ্ছে। শূন্যটা থাকতে পারত, কিন্তু আমরা interval-গুলো থেকে শূন্যকে গোড়াতেই বাদ দিয়ে রেখেছি, ওদিকে গোল ব্র্যাকেট দিয়ে। সুতরাং positive-রা বাদ, শূন্যও বাদ, আর negative-রা তো এমনিই বাদ, কারণ কোনো I_n-এই negative কিছু নেই।

$\because$ By Archimedean property

$\forall x > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \frac{1}{N} < x,$

$\therefore \forall x \in \mathbb{R} \quad x \notin I_N$. and so $x \notin \cap_n I_n$.

Also, $\forall x \leq 0 \quad x \notin I_1$, and so $x \notin \cap_n I_n$.

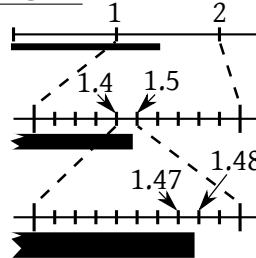
■

Exercise 22: এমন closed, bounded interval $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ দিতে পারো যাতে $\text{length}(I_n) \not\to 0$ হয়? ■

4.1 Decimal expansion-এর গল্প

এইবার বলি Nested Interval Theorem কিভাবে আমরা ছোটোবেলা থেকেই না জেনে ব্যবহার করে আসছি। সেই যে Pythagoras-এর গল্পে বলেছিলাম $\sqrt{2}$-কে কোনো স্কেল দিয়েই ভাবেই সম্পূর্ণ ভাবে মেপে ফেলা যায় না, সেই সমস্যারই একটা সমাধান হল এই theorem-টা। তাই অংকের ইতিহাসে এর খুবই গুরুত্বপূর্ণ স্থান। ধরো তোমাকে একটা দৈর্ঘ্য মাপতে দিলাম মিটারে। তুমি মাপতে গিয়ে দেখলে সেটা 1 মিটারের কিছু বেশী হচ্ছে (Fig 21)। তখন তুমি মিটারের স্কেলটাকে দশভাগে ভেঙে বাড়তি দৈর্ঘ্যটুকু ডেসিমিটারে মাপলে, তাতে দেখলে যে 4 থেকে 5-এর মাঝামাঝি কিছু হচ্ছে। তার মানে মোট দৈর্ঘ্যটা আছে 1.4 মিটার থেকে 1.5 মিটারের মধ্যে। এবার তুমি আরও দশভাগ করে সেন্টিমিটার দিয়ে মাপলে, ধরো পেলে 7 থেকে 8-এর মধ্যে, মানে মূল দৈর্ঘ্যটা পড়েছে 1.47 থেকে 1.48 মিটারের মাঝে কোথাও।

গ্রীকরাও কিন্তু ঠিক এইভাবেই দৈর্ঘ্য মাপত, খালি ওরা প্রতিবারই যে 10 ভাগ করত এমন নয়। প্রথমদিকে ওদের বিশ্বাস ছিল যে ভাগগুলো যথেষ্ট সূক্ষ্ম নিলে যে কোনো দৈর্ঘ্যই একসময়ে পুরো মেপে ফেলা যাবে, মানে দৈর্ঘ্যটা স্কেলের কোনো একটা দাগের সঙ্গে একদম মিলে যাবে। Pythagoras সেই বিশ্বাসে প্রথম আঘাত হেনে নিজেই কিরকম ঘাবড়ে গেছিলেন সে কথা তো বলেইছি।

Fig 21

Georg Cantor আধুনিক যুগের গণিতজ্ঞ। তিনি সহজে হাল ছাড়ার পাত্র নন। তিনি বললেন কুছ্ পরোয়া নেই, যদি দৈর্ঘ্যটা কোনো দিনই স্কেলের কোনো দাগের সঙ্গে না মেলে তবে আমি প্রতি ধাপে স্কেলটাকে আরো 10 ভাগ করতে থাকব, কোনো দিনই থামব না। প্রাচীনকালের গ্রীকরা অবশ্য এ কথা শুনলে আঁতকে উঠে বলত যে তবে তো মাপা কোনোদিনই আর শেষ হবে না! তা, ওদের ভয় পাওয়াটা ক্ষমা করা যায়, আজ Newton, Leibnitz ইত্যাদি গণিতজ্ঞদের কল্যাণে infinity, limit ইত্যাদি যতটা ঘরোয়া জিনিস হয়ে এসেছে, সে আমলে তো আর তেমনটা ছিল না। দোর্দণ্ডপ্রতাপ শাহেনশা আকবর তোমার হাতের মোবাইল ফোনটা দেখলে ঠিক এমনিভাবেই আঁতকে উঠতেন। যাই হোক, আমরা দৈর্ঘ্য মাপার প্রসঙ্গে ফিরে আসি। যদি দৈর্ঘ্যটা হয় ℓ মিটার তবে আমরা ইতিমধ্যেই পেয়েছি যে

$$\ell \in (1, 2) \text{ এবং } \ell \in (1.4, 1.5) \text{ এবং } \ell \in (1.47, 1.48).$$

Cantor-এর পরিকল্পনা হল এভাবে চালিয়েই যাওয়া, তার মানে decimal-এর সংখ্যা বাড়িয়ে চলা। যদি আমরা interval-গুলোকে (a_n, b_n) বলি তবে তুমি একটা nested sequence of interval পাবে। কিন্তু এখানে একটা সমস্যা আছে, আমরা সবসময়ে open interval নিচ্ছি, মানে দুই প্রান্তকে বাদ দিচ্ছি। যদি দৈর্ঘ্যটা কোনো একটা প্রান্তের দাগের সঙ্গে মিলে যায় তবে তো সেটা আর open interval-এর মধ্যে থাকবে না। সেই অসুবিধা এড়াবার জন্য Cantor করলেন কি, open interval-এর বদলে closed interval নিয়ে কাজ করলেন। এইবার উনি প্রশ্ন করলেন যে এরকম যাবতীয় interval-গুলো দেওয়া থাকে তা থেকে কি ℓ-কে নির্ভুলভাবে বার করে দেওয়া যাবে? Limit-এর ধারণা (বা বলা উচিত supremum, infimum-এর ধারণা) কাজে লাগিয়ে তিনি দেখলেন যে উত্তরটা হল--হ্যাঁ। শুধু তাই নয়, এর জন্য প্রত্যেকবার সমান 10 ভাগ করারও কোনো দরকার নেই, খালি interval-গুলোর দৈর্ঘ্য কমতে কমতে $0-$ দিকে গেলেই চলছে! এবং ঠিক এই কথাটাই হল Nested Interval Theorem.

এই ব্যাপারটা এতই স্বাভাবিক যে আমরা ছোটোবেলা থেকেই এটা না জেনেই প্রয়োগ করে ফেলি, যেমন আমরা বলি যে

$$\sqrt{2} = 1.414...$$

ওই যে শেষে ডট্‌ডট্ দিয়েছি ওর মানে আরো অসংখ্য সংখ্যা আছে দশমিকের পরে, সবগুলো মিলে $\sqrt{2}$ হয়। কিন্তু দশমিকের পরে অসংখ্য সংখ্যা লিখে গেলেই যে সব মিলিয়ে আদৌ একটা সংখ্যা (এবং একটাই সংখ্যা) হয় সেটা নিয়ে সন্দেহ করার কথা আমাদের মাথাতেও আসে না! সেখানেই কিন্তু আসলে আমরা না জেনেই Nested Interval Theorem লাগাচ্ছি!

Cantor এবং তাঁর এই বিখ্যাত theorem-এর ইতিহাস এখানেই শেষ নয়। কিন্তু আরো গল্পের আগে আমরা শিখে নিই কি করে theorem-টা প্রমাণ করতে হয়।

4.2 Proof

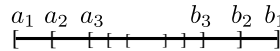
এবারের অংকটায় আমরা nested interval theorem-এর প্রথম অংশ প্রমাণ করব।

Example 21: Let $\{I_n\}_n$ be a sequence of nonempty bounded closed intervals such that $I_{n+1} \subseteq I_n$ for all n. Show that there exists at least one point ξ such that

$$\xi \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Is the conclusion true if $\{I_n\}_n$ is a sequence of open intervals? Justify your answer.[4+2] **(1997)**

SOLUTION: প্রতিটি I_n-ই হচ্ছে closed, bounded interval, অর্থাৎ $[a, b]$ জাতীয় জিনিস। তাই I_n-গুলোকে সেইভাবে লিখে নিই--

Fig 22

a_1 a_2 a_3 b_3 b_2 b_1

Let $I_n = [a_n, b_n]$.

যেহেতু I_n-গুলো ক্রমশঃ ছোটো হচ্ছে তাই $[a_1, b_1]$-টা সবচেয়ে বড়ো, তার ভিতরে আছে $[a_2, b_2]$ তার ভিতরে $[a_3, b_3]$, এই রকম (Fig 22)।

Then
$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1.$$

আমাদের কাজ হল এমন একটা সংখ্যা বার করা যেটা ওই মাঝের $\cdots$-এর মধ্যে পড়ে, যাতে সবগুলো a_n থাকে তার বাঁদিকে, আর সব b_n-গুলো পড়ে তার ডানদিকে।

To show

$\exists \xi \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq \xi \leq b_n.$

যেহেতু যাবতীয় a_n-কে ξ-এর বাঁদিকে রাখতে হবে, সুতরাং ξ হবে a_n-দের একটা upper bound. আবার বেশী বড়ো upper bound নিলে মুস্কিল, কারণ তাহলে আবার কয়েকটা b_n-ও এর বাঁদিকে চলে আসতে পারে। সুতরাং যত ছোটো একটা upper bound নেওয়া যায় ততই ভালো। আচ্ছা, a_n-গুলোর supremum নিলে হয় না? অবশ্য আগে দেখে নিই যে supremum আদৌ আছে কিনা!

Let $A = \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Then $A \neq \phi$ and A is bounded from above (by b_1).

$\therefore \sup A \in \mathbb{R}$.

$\exists \xi$ Choose $\xi = \sup A$.

এবার একটা $\forall n \in \mathbb{N}$ আছে, সুতরাং--

$\forall n$ Take any $n \in \mathbb{N}$.

প্রথমে বলি $a_n \leq \xi$ কেন--

$\because \xi$ is an upper bound of A, so $a_n \leq \xi$.

এবার বলি $\xi \leq b_n$ কেন--

Again, since ξ is the least upper bound of $\{a_n\}$, and b_n is also an upper bound, so $\xi \leq b_n$.

This completes the proof.

প্রশ্নের দ্বিতীয় অংশের উত্তর আগের অংকেই করেছি। ■

এবার nested interval theorem-এর দ্বিতীয় অংশের প্রমাণ লিখব নীচের অংকটার উত্তরে।

Example 22: Let $\{I_n\}_n$ be a sequence of closed intervals such that each is contained in the

preceding. Prove that there exists a point ξ such that

$$\xi \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

If moreover $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$, show that ξ is unique. (Here $|I_n|$ stands for the length of the interval I_n.) If instead of a sequence of closed intervals, a sequence of open intervals is taken, will the result be true? Justify your answer.[3+2+1] **(2003)**

SOLUTION: এই অংকটার তিনটে অংশ। প্রথম আর শেষ অংশ আগের অংকেই করেছি। খালি মাঝের অংশটা করি। শুরুটা আগের মতই--

> Let $I_n = [a_n, b_n]$.
> Then $|I_n| = b_n - a_n$.
> Given: $b_n - a_n \to 0$ as $n \to \infty$.
> To show: $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ contains exactly one point.

এবার contradiction লাগাব--

> Let, if possible, this statement be false.

আমরা আগের অংকে (বা এই অংকের প্রথম অংশে) দেখিয়েছি যে intersection-টার মধ্যে অন্ততঃ একটা point আছে। আর এখন আমরা দাবী করছি যে কেবলমাত্র একটা point-ই নেই। তার মানে অন্ততঃ দুটো point আছে।

> $\because \cap_{n=1}^{\infty} I_n$ has at least one point,
> $\therefore \cap_{n=1}^{\infty} I_n$ has at least two distinct points, say, $a < b$.

এখানে আমরা "$a < b$" কি করে পেলাম? কারণ, যেহেতু অন্ততঃ দুটো point আছে, সুতরাং তাদের মধ্যে একজন তো অপেক্ষাকৃত ছোটো হবেই। সেইটাকেই আমরা a বলেছি, আর অপেক্ষাকৃত বড়টাকে b নাম দিয়েছি।
এবার ব্যাপারটাকে এইভাবে ভাবো--$[a_n, b_n]$-গুলো যেন একটার ভিতরে একটা পোঁটলা। এরা ক্রমশই ছোটো হচ্ছে। কিন্তু এদের সবার ভিতরেই a আর b আছে। সুতরাং কত আর ছোটো হবে, $(b-a)$-র থেকে তো আর ছোটো হতে পারবে না! এদিকে প্রশ্নে বলা আছে, I_n-দের দৈর্ঘ্য নাকি কমতে কমতে শূন্যে যাচ্ছে। সুতরাং contradiction!

> $\because \forall n \in \mathbb{N}\ \ a, b \in [a_n, b_n]$,
>
> $\therefore a_n \le a < b \le b_n$.
> $\therefore \forall n \in \mathbb{N} \quad b_n - a_n > b - a > 0\ \ (\Rightarrow\Leftarrow, \because b_n - a_n \to 0$ as $n \to \infty)$.
> This contradiction proves the result.

■

Example 23: For each positive integer n let I_n be a closed interval and suppose

1. $I_n \supset I_{n+1} \quad (n = 1, 2, ...)$
2. $d_n =$ length of $I_n \to 0$ as $n \to \infty$.

Prove that $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ contains precisely one point. What conclusion is drawn from the following facts:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\} \text{ and } \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]0, \frac{1}{n}\right[= \phi?$$

(2005)

SOLUTION: প্রথম অংশটা তো আগেই করা হয়েছে। দ্বিতীয় অংশে একটা নতুন notation রয়েছে--থার্ড ব্র্যাকেট উল্টো করে বসানো। এখানে $]a, b[$ মানে হল (a, b). একই ভাবে অনেকে $(a, b]$-কে লেখে $]a, b]$ হিসেবে।
লক্ষ কর যদি আমরা $I_n = (0, \frac{1}{n})$ নিতাম, তবে I_n-গুলো closed হত না, কিন্তু প্রথম অংশের বাকী সবগুলো শর্তই পালন করত। কিন্তু তাও $\cap_1^{\infty} I_n$-এ একটাও point নেই। অর্থাৎ প্রথম অংশে ওই যে "closed" শর্তটা ছিল, ওটা অপরিহার্য। কিন্তু যদি $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ নিতাম তবে কিন্তু $\cap_1^{\infty} I_n$-এ দিব্যি একটাই point থাকত। তার মানে সিদ্ধান্ত হল এই যে, I_n-গুলো open interval হলে কিছুই বলা যায় না।

> The conclusion drawn from the given facts is that if I_n's are open intervals satisfying the given conditions then $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ may contain either exactly one point or no point.
>
> Of course $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ cannot contain two distinct points since $d_n \to 0$.

■

Example 24: Let $\{I_n\}$ be a sequence of nested closed and bounded intervals. Prove that $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$. When will this intersection be a singleton set?[3+1] **(2011.3b)**

SOLUTION: প্রথম অংশ আগেই আলোচনা করেছি। দ্বিতীয় অংশটা এইরকম--

> If $I_n = [a_n, b_n]$, then a necessary and sufficient condition for the the intersection to be a singleton set is
>
> $$b_n - a_n \to 0.$$

■

4.3 গল্পের পরবর্তী অংশ

Nested Interval Theorem (যেটা অবশ্য Cantor Intersection Theorem নামেই বেশী পরিচিত) সেটা প্রমাণ করে Cantor যে ভারী আনন্দ পেয়েছিলেন বুঝতেই পারো। এমনিতেই নিজে নিজে একটা theorem বার করে প্রমাণ করতে পারার মজাই আলাদা, তার উপর আরেকটা বিশেষ কারণও ছিল। এই প্রথম একটা হাতিয়ার পাওয়া গেল যা দিয়ে যে কোনো real number-কে প্রকাশ করা যায়। এতদিন খালি rational-দের লেখা যেত (p/q আকারে), আর $\sqrt{2}, \pi, e$ এইরকম কয়েকটা irrational number -কে আলাদা আলাদা চিহ্ন দিয়ে বোঝানো যেত। বাকী irrational-দের অস্তিত্ব জানা ছিল, কিন্তু লিখে প্রকাশ করার পথ ছিল না। কুসংস্কারাচ্ছন্ন লোকেরা যেমন ভূতের কথা উঠলে "সেই তেনারা যাদের নাম করা যায় না" বলে, irrational সংখ্যাদের বেলাতে মানুষেরও কতকটা সেই দশা ছিল। কিন্তু এবার জানা গেল যে, দশমিক চিহ্নের পর যা খুশী অসংখ্য সংখ্যা পর পর বসিয়ে গেলেই একেকটা real number পাওয়া যায়, এবং যে কোনো real number-কেই এভাবে প্রকাশ করা যায়, rational, irrational সব্বাইকে!
কিন্তু এখানে দুটো সমস্যা দেখা দিল।

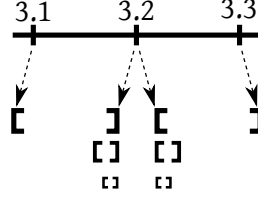



Fig 23

- এক, সব সময়েই কি দশমিকের পর অসংখ্য সংখ্যা থাকবে? যেমন 0.2 সংখ্যাটার বেলায় তো দশমিকের পর খালি একটা সংখ্যাই আছে! এরকম decimal-কে আমরা **terminating decimal expansion**. বলি। "Terminating" অর্থাৎ কিনা যা শেষ হয়ে যায়।

- দুই, ধরো সেই দৈর্ঘ্য মাপার উদাহরণে দৈর্ঘ্যটা হল 3.2 মিটার। আমরা যখন মিটারের স্কেলটাকে ডেসিমিটারে ভেঙে দেখছি তখন বস্তুতঃ পরীক্ষা করে দেখছি এই কয়টা closed interval-এর মধ্যে থেকে কোনটার ভিতর দৈর্ঘ্যটা আছে--

$$[3.0, 3.1], \quad [3.1, 3.2], \quad [3.2, 3.3], \quad ..., \quad [3.9, 4.0].$$

  সমস্যা হল 3.2 তো দুটো interval-এ পড়ে--$[3.1, 3.2]$ এবং $[3.2, 3.3]$. এদের মধ্যে কোনটা নেব?

দ্বিতীয় প্রশ্নটার উত্তর হল--যেটা খুশী নেওয়া যায়। Fig 23 দ্যাখো। যদি $[3.2, 3.3]$ নাও তবে এর পরের ধাপে (মানে সেন্টিমিটারের ধাপে) দৈর্ঘ্যটা পড়বে $[3.20, 3.21]$-এর মধ্যে, তার পরে মিলিমিটারের ধাপে পড়বে $[3.200, 3.201]$-এর মধ্যে। সুতরাং এইভাবে এগোলে তুমি এই decimal expansion-টা পাবে--

$$3.200000...$$

অতগুলো 0 দেখে ভুলো না, এটা কিন্তু আসলে সেই terminating decimal expansion মানে 3.2-ই। কিন্তু যদি $[3.1, 3.2]$ নিয়ে শুরু করতে, তবে সেন্টিমিটারের ধাপে পেতে $[3.19, 3.20]$, মিলিমিটারের ধাপে পেতে $[3.199, 3.200]$, ইত্যাদি। সুতরাং এক্ষেত্রে একই দৈর্ঘ্যের আরেকটা decimal expansion পেতে--

$$3.199999...$$

এটাকে আমরা বলি **nonterminating decimal expansion**. এই দুটো decimal expansion-ই কিন্তু একই সংখ্যাকে বোঝাচ্ছে। সুতরাং একই real number-এর দুটো decimal expansion পাওয়া গেল--

$$3.2 \text{ এবং } 3.19999....$$

একই সংখ্যার একাধিক decimal expansion থাকাটা একটু দুঃখজনক। প্রত্যেকটা real number-কেই যে decimal expansion দিয়ে লেখা যায় সেটা দৈর্ঘ্য মাপার কায়দা থেকেই বুঝতে পারছ। সেটা সুখবর। কিন্তু সে আনন্দটা আরো বাড়ত যদি দেখা যেত যে decimal expansion-টা unique-ও হয়। যাই হোক, সে সুখটা হল না। তবে সমস্যাটা খালি তাদের ক্ষেত্রে যারা কোনো একটা দাগের সঙ্গে মিলে যায়। যারা দাগের সঙ্গে মিলে যায় তারা সবাই rational সংখ্যা। সুতরাং সিদ্ধান্ত করা যাচ্ছে যে,

- এক, সব real number-এরই ঠিক একটা করেই nonterminating decimal expansion আছে।

- দুই, কিছু কিছু rational সংখ্যা (যারা কোনো দাগের সঙ্গে মিলে যায়), তাদের ক্ষেত্রে একটা করে terminating decimal expansion-ও আছে। এরকম সংখ্যার একটা উদাহরণ হল 3.2.

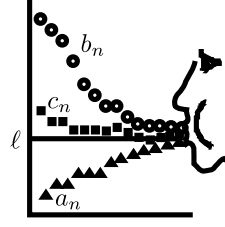



Fig 24

- তিন (এটা আমরা দেখাব না, কিন্তু তুমি সহজেই প্রমাণ করার চেষ্টা করতে পারো), rational-দের nonterminating decimal expansion সবসময়ে recurring হয় (যেমন $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$). কিন্তু irrational-দের বেলায় কখনোই তা হয় না, যেমন $\sqrt{2} = 1.414....$

এই তথ্যটা এই বইতে পরেও আমাদের কাজে লাগবে--

> **THEOREM**
>
> Every real number has unique nonterminating decimal expansion, and every nonterminating decimal expansion specifies a unique real number.

মনে রেখো যে nonterminating decimal expansion মানে হল একটা দশমিক বিন্দু বসিয়ে তার বাঁদিকে যতগুলো খুশী finite-সংখ্যক digit বসিয়ে দেওয়া, আর দশমিকের ডানদিকে infinite-সংখ্যক digit বসিয়ে যাওয়া। খালি ডানদিকের বেলায় একটাই বাড়তি শর্ত, একটা পর্যায়ের পর থেকে যেন সবগুলো digit-ই 0 না হয়ে যায়। যেমন 3.200000... মোটেই একটা nonterminating decimal expansion নয়।
Real number-দের এত স্পষ্ট বর্ণনা এর আগে কেউ বার করতে পারে নি। এই বর্ণনা ব্যবহার করে Cantor অংকের দুনিয়ায় নানা আশ্চর্য অবদান রেখে গেছেন। তার কিছু পরিচয় পাবে এই বইয়ের শেষ অধ্যায়ে, আরও কিছু নিদর্শন আসবে এই বইয়ের তৃতীয় খণ্ডে, যেখানে আমরা Cantor set নিয়ে আলোচনা করব।

DAY 5
Three special topics

5.1 Sandwich law of limit

ধরো তুমি একটা sandwich বানিয়ে খেতে বসেছ--দুই স্লাইস পাঁউরুটির মধ্যে একটা মাংসের টুকরো[1] ঢুকিয়ে স্লাইসদুটোকে মুখে পুরে দিয়েছ। তবে মাংসের টুকরোটা কোথায় যাবে? কোথায় আর যাবে, তোমার মুখের ভিতরেই যাওয়া ছাড়া ওর আর কি গত্যন্তর আছে? এইটাকেই বলে sandwich law. অংকের জগতে এটা খুবই দরকারী জিনিস, তাই ব্যাপারটা অংকের ভাষায় লেখা যাক। ধরো দুটো sequence আছে $\{a_n\}_n$ আর $\{b_n\}_n$ এরা হল দুই স্লাইস পাঁউরুটি, একটার উপরে একটা বসাতে হবে, তাই ধরে নেব যে

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq b_n.$$

এবার এদের মাঝখানে ঢোকাব মাংসের টুকরো, মানে আরেকটা sequence $\{c_n\}_n$, যেখানে

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq c_n \leq b_n.$$

[1]যদি নিরামিষাশী হও তবে মাংসের বদলে আলুসেদ্ধ ভাবতে পারো!

এবার যদি $\{a_n\}_n$ আর $\{b_n\}_n$ দুজনেই একই সঙ্গে মুখে ঢোকে, মানে ওদের একই limit হয়, তবে বুঝতেই পারছ যে $\{c_n\}_n$-ও ওই একই limit-এ যেতে বাধ্য। Fig 24 দ্যাখো। ছবিতে অবশ্য limit-টাকে finite করে দেখিয়েছি, যদি ∞ বা $-\infty$ হত তাতেও আপত্তি ছিল না। সুতরাং--

Sandwich law

If $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n, \{c_n\}_n$ are three sequences with

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq c_n \leq b_n,$$

and

$$\lim a_n = \lim b_n = \ell \text{ (may be } \infty \text{ or } -\infty),$$

then

$$\lim c_n = \ell.$$

Exercise 23: প্রমাণটা একদম ছোট্টো, চেষ্টা করেই দেখবে নাকি? ■

কিছু কিছু function আছে যেগুলো যতই বিদ্ঘুটে value নিক না কেন, সবসময়েই bounded থাকে। যেমন $\sin x$ বা $\cos x$. এরা দুজনেই $[-1,1]$-এর মধ্যে থাকে। আরেকটা উদাহরণ হল $f(x) = x - [x]$, অর্থাৎ x-এর positive fraction অংশটুকু, যেমন $f(1.2) = 0.2$ আর $f(-1.2) = -1.2 - (-2) = 0.8$. লক্ষ কর যে $f(x)$ সবসময়েই $[0,1)$-এর মধ্যে থাকে। এইরকম function-ওয়ালা limit বার করার জন্য sandwich law হল অমোঘ অস্ত্র--

Example 25:

$$\frac{\sin(n^2 - 34n + 5)}{n^2 + 1} \to ?$$

SOLUTION: বাপ্‌রে, উপরতলার জিনিসটা কি সাংঘাতিক দেখতে। কিন্তু দেখতে যতই যা হোক, ওর সব জারিজুরি $[-1,1]$-এর মধ্যেই সীমাবদ্ধ। তাই--

> Let $a_n = -\frac{1}{n^2+1}$ and $b_n = \frac{1}{n^2+1}$. If the given sequence is called $\{c_n\}_n$ then we have
>
> $$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq c_n \leq b_n.$$
>
> Now $a_n \to 0$ and $b_n \to 0$ as $n \to \infty$.
>
> So, by sandwich law, $c_n \to 0$.

■

Exercise 24:

$$\frac{\exp([e^n] - e^n + 5)}{\sqrt{n}} \to ?$$

■

5.2 Useful sequences

নতুন নতুন sequence বানানো কঠিন কিছু নয়, একটা যা কিছু n-ওয়ালা ফর্মুলা লিখলেই হল, যেমন $\{\sin n\}_n, \{\frac{n}{1+n}\}_n$ ইত্যাদি। এদের মধ্যে কিছু sequence আছে যেগুলো অংকে বার বার কাজে আসে। এদের কয়েকজনের পরিচয় আমরা ইতিমধ্যেই পেয়েছি--$\{\frac{1}{n}\}_n, \{(-1)^n\}_n$ ইত্যাদি। এবার আরও তিনজনের দেখা মিলবে--

$$\sqrt[n]{n}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ আর } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

এর মধ্যে প্রথমজন 1-এ converge করে, দ্বিতীয়জন $\frac{\pi^2}{6}$-এ converge করে, আর তৃতীয়জন ∞-তে diverge করে।

Example 26: Show that $\{\sqrt[n]{n}\}_n$ converges to 1. **(2004,2008)**

SOLUTION:

Let $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Shall show $x_n \to 0$.

এইটা কিছুটা কৌশলের অংক। আমরা দেখাব যে $x_n^2 < \frac{2}{n-1}$. এবার $n \to \infty$ হলে $\frac{2}{n-1} \to 0$ হবে, এবং বাধ্য হয়েই $x_n^2 \to 0$ হবে। আর $x_n^2 \to 0$ হলে $x_n \to 0$ না হয়ে যায় কোথায়!

Note that $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq 0$.
Now $\because \sqrt[n]{n} = 1 + x_n$

$$\therefore n = (1 + x_n)^n$$

এবার binomial theorem লাগাব--

$$\begin{aligned} \therefore n &= {}^nC_0 + {}^nC_1 x_n + {}^nC_2 x_n^2 + \cdots + {}^nC_n x_n^n \\ &> {}^nC_2 x_n^2 \quad [\because x_n \geq 0 \text{ and } {}^nC_0 > 0] \\ &= \frac{n(n-1)}{2} x_n^2, \end{aligned}$$

or

$$x_n^2 < \frac{2}{n-1}.$$

Since $\frac{2}{n-1} \to 0$ as $n \to \infty$, hence $x_n^2 \to 0$, and so $x_n \to 0$, as required.

■

Example 27: Prove that $\{\sqrt[n]{n}\}_n \to 1$ when $n \to \infty$. Hence show that $\{x_n\}_n$ where

$$x_n = \frac{1 + 2^{1/2} + 3^{1/3} + \cdots + n^{1/n}}{n}$$

also converges to 1.[3+2] **(2004)**

SOLUTION: প্রথম অংশটা তো আগের অংকটাই। আর দ্বিতীয় অংশে ব্যবহার করব ?? পাতার ?? নম্বর অংক।

We know that if $a_n \to a$ then

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to a.$$

Taking $a_n = \sqrt[n]{n}$ and $a = 1$, we have the required result.

■

Example 28: Show that a monotonically increasing sequence of real numbers is convergent if the sequence is bounded above. Hence prove that the sequence $\{x_n\}_n$ where

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

is convergent.[3+2] **(2004)** প্রথম অংশটা আগেই করেছি **??** নম্বর অংকে (**??** পাতায়)। এবার দ্বিতীয় অংশ--

We have

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0.$$

So $\{x_n\}_n$ is a nondecreasing sequence.

এইবার দেখাব যে sequence-টা bounded above. কাজটা করা ঠিক সহজ নয়, একটা প্যাঁচ জানা না থাকলে মুস্কিল! প্যাঁচটা হল $\frac{1}{n^2}$-গুলোকে কায়দা করে গ্রুপে গ্রুপে ভাগ করা।
এর জন্য মোট term-এর সংখ্যা 2-এর power-এ থাকলে সুবিধা হবে। তাই--

Take any n. Let N be the least integer such that $2^N \geq n$.

যেমন $n = 5$ হলে আমরা দেখছি যে 5-এর পরে 2-এর প্রথম power হল 2^3. তাই $N = 3$ নেব।

Then

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \tfrac{1}{2^2} + \cdots + \tfrac{1}{n^2} \\ &\leq 1 + \tfrac{1}{2^2} + \cdots + \tfrac{1}{n^2} + \cdots + \tfrac{1}{(2^N)^2} \end{aligned}$$

এর কারণ বাড়তি term যোগ করলে তো জিনিসটা ছোটো হয়ে যেতে পারে না, যেহেতু term-গুলো সবাই positive.
এইবার সেই গ্রুপে ভাগ করার ব্যাপারটা--

$$= 1 + \tfrac{1}{2^2} + \left(\tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{4^2}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{(2^{N-1}+1)^2} + \cdots + \tfrac{1}{(2^N)^2}\right)$$

এই ধাপটা বোঝা যাক। এখানে আমরা প্রথম দুটো term-কে বাদ দিয়ে তারপর থেকে দুটো, চারটে, আটটা, ষোলোটা এই ভাবে term-গুলোকে গ্রুপ করেছি। প্রথম গ্রুপে আছে 3 আর 4 নম্বর term দুটো। তারপরের গ্রুপে থাকবে 5 থেকে 8 পর্যন্ত, তারপরেরটায় 9 থেকে 16 পর্যন্ত, এইরকম।

$$\leq \quad 1+\tfrac{1}{2^2}+\left(\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{(2^{N-1})^2}+\cdots+\tfrac{1}{(2^{N-1})^2}\right)$$

এইটা আরেকটা গোলমেলে ধাপ। প্রথম গ্রুপে ছিল $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}$. এরা দুজনেই $\frac{1}{2^2}$-এর চেয়ে ছোটো। এর পরের গ্রুপে থাকবে $\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}$. এরা সবাই $\frac{1}{4^2}$-এর থেকে ছোটো। ফলে প্রথম গ্রুপটা $\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$-এর চেয়ে ছোটো, দ্বিতীয় গ্রুপটা $\frac{4}{4^2}=\frac{1}{4}$-র চেয়ে ছোটো। এইভাবে চলতে চলতে--

So

$$\begin{aligned} x_n &\leq 1+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{4^2}\cdots+\frac{2^{N-1}}{(2^{N-1})^2} \\ &= \frac{5}{4}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\cdots+\frac{1}{2^{N-1}}\right) \\ &\leq \frac{5}{4}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\cdots\right) \\ &= \frac{5}{4}+1. \end{aligned}$$

তার মানে দাঁড়ালো এই যে সবগুলো x_n-ই $9/4$-এর চেয়ে ছোটো, অর্থাৎ $\{x_n\}_n$ sequence-টা bounded above.

Since every nondecreasing real sequence bounded from above is convergent, $\{x_n\}_n$ is convergent.

■

এটাও দেখানো সম্ভব যে limit-টা হবে $\frac{\pi^2}{6}$, কিন্তু আমরা সেই প্রমাণে যাব না।

Exercise 25: Prove that $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\to\infty$ as $n\to\infty$. ■

5.3 Limit points and dense sets

ধরো $E\subseteq\mathbb{R}$ একটা set আর $c\in\mathbb{R}$ হল তার একটা limit point. তার মনে c-এর গায় লেগে E-র অসংখ্য point ভীড় করে আছে। আমি যদি এই ভীড়ের থেকে পর পর point নিতে থাকি তবে এমন একটা sequence পেতে পারি যেটা ক্রমশঃই c-এর দিকে এগিয়ে আসবে, অর্থাৎ c-তে converge করবে। এই কথাটা অনেক সময়েই খুব কাজে লাগে।

Fig 25

$N'(2,\epsilon_1)$ যেন 2-কে ঘিরে একটা ফাঁদ।

$N'(2,\epsilon_1)$

0 2

x_1-টা এই ফাঁদে পড়েছে।

Fig 26

ফাঁদটা আরো টাইট করেছি।

$N'(2,\epsilon_2)$

0 2

এবার x_2-টা ফাঁদে পড়েছে

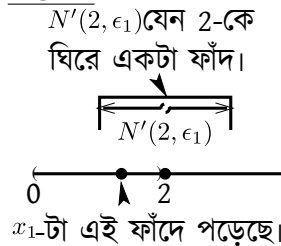
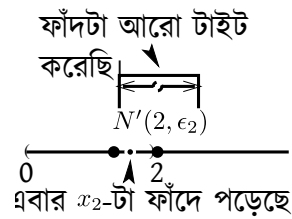
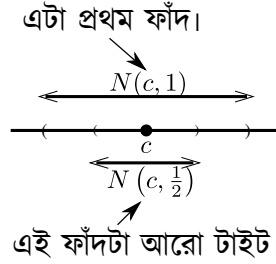



Fig 27

এই কথাটাই প্রমাণ করতে দিয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 29: Let the real number c be a limit point of a set E of real numbers. Prove that there exists a sequence $\{x_n\}_n$ of distinct elements of E such that $x_n \to c$ as $n \to \infty$.[3] **(2004)**

SOLUTION:

> $\because c \in E', \quad \therefore \forall \epsilon > 0 \quad N'(c,\epsilon) \cap E \neq \phi.$
> Taking $\epsilon_1 = 1$ we can pick $x_1 \in N'(c,\epsilon_1) \cap E.$

Fig 25 দ্যাখো। এখানে আমরা উদাহরণ হিসেবে $E = (0,2)$ আর $c = 2$ নিয়েছি। এবার আমরা আরেকটা point নেব x_2, যেটা c-এর আরো বেশী কাছে। Fig 26 দ্যাখো।

> Since $x_1 \neq c$, so taking $\epsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}, |x_1 - c|\} > 0$ we have $x_2 \in N'(c,\epsilon_2) \cap E.$

এইভাবে চলতে চলতে $x_3, x_4, \ldots$ ইত্যাদি পাব, যারা c-তে গিয়ে converge করবে।

> Continuing like this, we get $x_1, x_2, x_3, \ldots$ where for each $k \geq 2$,
>
> $$x_k \in N'(c,\epsilon_k) \cap E \text{ with } \epsilon_k = \min\{\tfrac{1}{2}, |x_{k-1} - c|\}.$$

লক্ষ কর যে x_n-রা সবাই distinct, কারণ ওরা একজায়গায় থেমে নেই, ক্রমশঃই c-এর কাছে এগিয়ে চলেছে।

> Clearly, x_k's are distinct elements of E, since
>
> $$|c - x_1| > |c - x_2| > |c - x_3| > \cdots,$$
>
> and also $x_k \to c$, as required.

■

THEOREM

Let $A \subseteq \mathbb{R}$ be dense in $\mathbb{R}$. Let $c \in \mathbb{R}$. Then there is a sequence $\{a_n\} \subseteq A$ such that $a_n \to c$.

Proof: এই প্রমাণটাও ঠিক আগের অংকটারই মত ফাঁদ টাইট করার অংক।

> $\because A$ is dense in $\mathbb{R}$, $\therefore \forall a < b \in \mathbb{R} = A \cap (a,b) \neq \phi$.

এইটা পেলাম "dense in $\mathbb{R}$"-এর definition থেকে (পঞ্চম অধ্যায়)। এবার c-কে ঘিরে ফাঁদ পাতার শুরু। Fig 27 দ্যাখো।

> $\therefore \forall \epsilon > 0 \quad A \cap N(c,\epsilon) \neq \phi$.
> So $\forall n \in \mathbb{N}$ we can take $\epsilon = \frac{1}{n}$, and pick $a_n \in A \cap N(c, \frac{1}{n}) \cap A$.
> Then $\{a_n\}_n \subseteq A$ and $a_n \to c$, Since $|a_n - c| < \frac{1}{n} \to 0$.

[Q.E.D]

Exercise 26: ঠিক না ভুল বল--

1. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists \{a_n\}_n \subseteq \mathbb{Q} \quad a_n \to a$.
2. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists \{a_n\}_n \subseteq \mathbb{Q}^c \quad a_n \to a$.
3. $\forall a \in \mathbb{Q}^c \quad \exists \{a_n\}_n \subseteq \mathbb{Q} \quad a_n \to a$.

■

Answers

1. $4, -5^5, 10^{10}$. **2.** $\frac{2n-1}{2n}$, $1+(-1)^n$, $(-1)^{n+1}n$ **3.** Nonincreasing: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$. Strictly decreasing: $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$. **4.** হ্যাঁ, constant sequence-রা। **5.** $\forall M > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad |a_n| > M$. **6.** $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq M$. **7.** Unbounded above: $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad a_n > M$. Unbounded below: $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad a_n < M$. **8.** $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n < M$. **9.** **(1)** $a_n + b_n \to -\infty$, **(2)** কিছু বলা যায় না, **(3)** $a_n b_n \to \infty$. **10.** **(1)** $\frac{1}{a_n} \to 0$, **(2)** $\frac{1}{b_n} \to 0$, **(3)** কিছু বলা যায় না। **11.** $x_n = (-1)^n$, $y_n = 20 - x_n$. **12.**

	$a_n + b_n$			
	conv	$\to \infty$	$\to -\infty$	oscl
A	$a_n = n$ $b_n = -n$	$a_n = 2n$ $b_n = -n$	$a_n = n$ $b_n = -2n$	$a_n = (-1)^n + n$ $b_n = -n$
B	✗	$a_n = n$ $b_n = (-1)^n$	✗	$a_n = n$ $b_n = (-1)^n n$
C	✗	✗	$a_n = -n$ $b_n = (-1)^n$	$a_n = -n$ $b_n = (-1)^n n$
D	$a_n = (-1)^n$ $b_n = -a_n$	$a_n = \begin{cases} n & \text{if } n \text{ even} \\ 0 & \text{if } n \text{ odd} \end{cases}$ $b_n = \begin{cases} n & \text{if } n \text{ odd} \\ 0 & \text{if } n \text{ even} \end{cases}$	$a_n = \begin{cases} -n & \text{if } n \text{ even} \\ 0 & \text{if } n \text{ odd} \end{cases}$ $b_n = \begin{cases} -n & \text{if } n \text{ odd} \\ 0 & \text{if } n \text{ even} \end{cases}$	$a_n = (-1)^n$ $b_n = a_n$

13. হ্যাঁ সম্ভব। $a_n = n$ আর $b_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ even} \\ \frac{1}{n} & \text{otherwise} \end{cases}$ **15.** Fig 3(b) **16.** না, যেমন $(2+(-1)^n)n$. **17.**

	Strictly decr	Non decr	Non incr	Strictly incr	Non monotone
Bounded	$\{\frac{1}{n}\}_n$	$\{0\}n$	$\{0\}n$	$\{-\frac{1}{n}\}_n$	$\{(-1)^n\}_n$
Unbounded	$\{-n\}_n$	$\{n\}_n$	$\{-n\}_n$	$\{n\}_n$	$\{(-1)^n n\}_n$

21. $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$. **22.** $I_n = [0, 1+\frac{1}{n}]$, এখানে $length(I_n) \to 1$. **23.** Take any $\epsilon > 0$. Then $\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad a_n \in N(\ell, \epsilon)$. Also, $\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad b_n \in N(\ell, \epsilon)$. Choose $N = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$. Take any $n \geq N$. Then $c_n \in [a_n, b_n] \subseteq N(\ell, \epsilon)$. **24.** $[e^n] - e^n$ সবসময়ে $[0,1)$-এর মধ্যে থাকে। ওর সাথে 5 যোগ করলে $[5,6)$-এর মধ্যে থাকবে। তার exp নিলে e^5 থেকে e^6-এর মধ্যে থাকবে, কারণ e^x হল nondecreasing function. সুতরাং $a_n = \frac{e^5}{\sqrt{n}}$ আর $b_n = \frac{e^6}{\sqrt{n}}$ নিলে তোমার sequence-টা a_n আর b_n-এর মাঝে sandwiched হয়ে যাচ্ছে। এদিকে $a_n \to 0$ এবং $b_n \to 0$. সুতরাং আমাদের উত্তরও 0. **25.** এইভাবে সাজাও-- $1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{7}) + (\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{15}) + \cdots$. প্রতিটি গ্রুপই $\geq \frac{1}{2}$. **26.** সবগুলোই ঠিক।

Chapter VII
Continuity and Limit

DAY 1
Continuity and discontinuity

এবার আমরা যে বিষয়টা নিয়ে আলোচনা করব সেটা ছবি দিয়ে বুঝতে সবচেয়ে সহজ। আমরা জানি যে, কোনো function $f(x)$-কে গ্রাফ এঁকে বোঝানো যায়। আমরা Fig 1-এ কয়েকটা গ্রাফ এঁকেছি। এদের সঙ্গে Fig 2-এর গ্রাফগুলো তুলনা কর। কি পার্থক্য লক্ষ করছ? Fig 1-এর গ্রাফগুলো একটানা আঁকা যায়, পেন না তুলে, কিন্তু অন্য ছবির গ্রাফগুলো আঁকতে পেন তুলতেই হবে। মোটামুটিভাবে, যেসব function-এর গ্রাফ পেন না তুলে আঁকা যায় তাদের বলে continuous function. যাদের গ্রাফ আঁকতে পেন তোলা ছাড়া পথ নেই, তারা হল discontinuous function.

একটা function যদি discontinuous হয় তবে তার গ্রাফ আঁকতে যেসব জায়গায় পেন তুলতে হয় সেইখানকার x-এর value হল তার point of discontinuity. যেমন Fig 3-এ দুটো point of discontinuity দেখা যাচ্ছে, $x = 1$ আর $x = 3$.

Discontinuity নানা রকমের হয়। এদেরকে মোটামুটি দুভাগে ভাগ করা যায়--type I আর type II. বোঝার জন্য লক্ষ কর যে, কোনো discontinuity-তে গ্রাফটা যেখানটায় ভাঙা সেখানে দুটো প্রান্তের সৃষ্টি হয়, একটা বাঁদিক থেকে, একটা ডানদিক থেকে। যদি দুটো প্রান্তেরই হদিশ পাওয়া যায়, তবে সেটা হল type I discontinuity. আর যদি অন্ততঃ একটা প্রান্তেরও হদিশ না পাওয়া যায়, তবে সেটা হল type II discontinuity. কথা হচ্ছে, এখানে আমি "হদিশ পাওয়া" বলতে কি বোঝাচ্ছি? এর জন্য Fig 4 দ্যাখো। এখানে যে গ্রাফটা আছে, সেটা যেন একটা রেললাইন, খালি উগ্রপন্থীরা এসে একটা ফিশপ্লেট একটু সরিয়ে দিয়েছে। আর Fig 5-এ রেললাইনটাকে বিভিন্ন জায়গায় মুচড়ে ভেঙে অনেকটা সরিয়ে দিয়েছে, যাতে দুই প্রান্ত মুখোমুখি থাকে নি। লক্ষ কর যে Fig 4 এবং Fig 5 এই দুটো ছবিতেই একটা মিল রয়েছে-- প্রতিটি point of discontinuity-তেই দুটো প্রান্তই হাতের কাছেই আছে (হয়তো মুখোমুখিও আছে), কিন্তু লেগে নেই। এরা হল type I discontinuity-র উদাহরণ। এর মধ্যে প্রথম discontinuity-টা সারিয়ে ফেলা সহজ, খালি ফিশপ্লেটটা যথাস্থানে ফিরিয়ে দিলেই হবে। তাই এই ধরণের type I discontinuity-কে বলে removable discontinuity. কিন্তু (b)-তে যেহেতু দুটো প্রান্ত মুখোমুখি পর্যন্ত নেই, তাই এটাকে সহজে সারাই করা যাবে না। এই লাইনে চলতে হলে রেলগাড়ীটার পক্ষে লাফ মারা ছাড়া গত্যন্তর নেই। তাই এইধরণের type I discontinuity-কে বলে jump discontinuity.

Fig 5 **Fig 6** **Fig 7**

এবার কিছু type II discontinuity-র নমুনা দেখা যাক। ধর এই function-টা--

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 3 & \text{if } x = 0 \end{cases}.$$

এর গ্রাফটা আছে Fig 6-এ। দেখতেই পাচ্ছ যে $x = 0$-তে একটা discontinuity আছে। এখানে কিন্তু প্রান্ত দুটোর কোনো হদিশ পাওয়া যাচ্ছে না, কারণ বাঁদিক থেকে যতই আমরা $x = 0$-র কাছে আসছি ততই গ্রাফটা নেমে যাচ্ছে, কোথাও থামছে না, একেবারে সটান $-\infty$-র দিকে ছুটেছে। একই ঘটনা ঘটছে $x = 0$-র ডানদিকেও, খালি সেখানে গ্রাফটা নীচে না নেমে, উপরে উঠছে, সটান ∞-র দিকে। এইটা হল একটা type II discontinuity-র উদাহরণ। Fig 7-এ আরো কয়েকটা উদাহরণ আছে। প্রতি ক্ষেত্রেই অন্ততঃ একটা প্রান্ত ∞ বা $-\infty$-র দিকে চলে গেছে। সেই কারণে এই ধরণের type II discontinuity-র আরেক নাম হল infinite discontinuity.

এ রকম ছাড়াও আরেক রকমের type II discontinuity হয়, তাকে বলে essential discontinuity. উগ্রপন্থীদের রেললাইন ওড়ানোর উপমা দিয়ে ভাবলে essential discontinuity হল এমন অবস্থা যেখানে অন্ততঃ একটা প্রান্ত একেবারে তছনছ্ হয়ে গেছে। এতটাই তছনছ্ যে গ্রাফ এঁকে বোঝানোও কঠিন। তাই এবার যে গ্রাফগুলো দেবো সেগুলো অসম্পূর্ণ হবে, বাকীটুকু ফর্মুলা এবং কল্পনা দিয়ে পূরণ করে নিও।

প্রথম উদাহরণটা দেবার আগে একটু মনে করিয়ে দিই যে $\sin x$-এর গ্রাফটা Fig 8(a)-এর মত। যদি $\sin 2x$-এর গ্রাফ আঁকি তবে হবে Fig 8(b)-এর মত। লক্ষ কর x-এর জায়গায় $2x$ আসাতে গ্রাফটার ঢেউগুলো কেমন দ্বিগুণ ঘনঘন হয়ে গেল। যদি $\sin 10x$ নিতাম তবে আরও ঘন হয়ে উঠত। $\sin(-10x)$ নিলেও একই ব্যাপার হত। অর্থাৎ sin-এর ভিতরের জিনিসটা absolute value-তে যত বাড়ে ততই ঢেউগুলো বেশী ঘনঘন ওঠাপড়া করে।

Example 1: ধর $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$. তবে এর গ্রাফটা হবে Fig 9-এর মত। এখানে x যতই 0-র কাছে যাচ্ছে, ততই $\frac{1}{x}$ বাড়ছে (absolute value-তে), ফলে $\sin\frac{1}{x}$-এর ঢেউগুলো ততই ঘনঘন হচ্ছে। x যখন 0-র খুব কাছে তখন আর দুটো ঢেউকে গ্রাফ দেখে আলাদাই করা যাচ্ছে না, পুরো কালো হয়ে যাচ্ছে। ওইখানটাতেই তোমাকে কল্পনা করে নিতে হবে একটা ঢেউ যেটা ক্রমাগত ঘন থেকে ঘনতর হচ্ছে, একবার উঠছে, পরমুহূর্তেই নামছে, ফের উঠছে, এবং আরো দ্রুত নামছে। সুতরাং আন্দাজ করতে পারছ যে $x = 0$-তে যে discontinuity, তাতে প্রান্তদুটো ওই সাংঘাতিক ওঠানামার

Fig 8

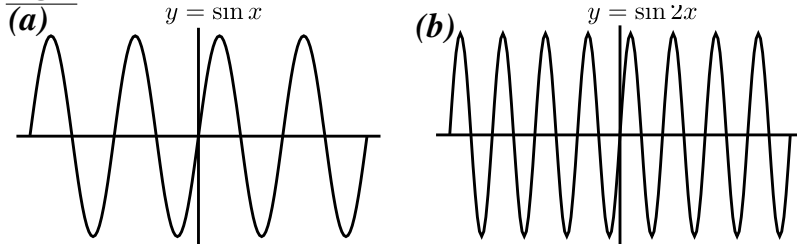
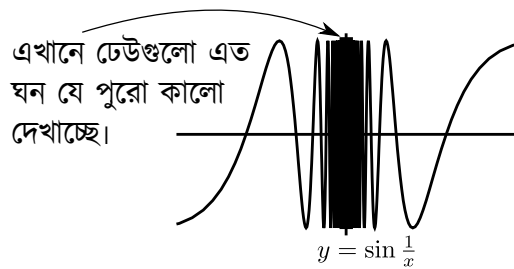
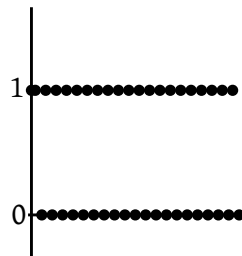



Fig 9 **Fig 10**

ভীড়ে হারিয়ে গেছে। তাই এটা হল একটা essential discontinuity, যেটা এক ধরণের type II discontinuity. ■

এই রকম বার বার ওঠানামা করা আরেকটা উদাহরণ দেখি, এখানেও essential discontinuity আছে।

Example 2:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

আমরা জানি যে $\mathbb{R}$-এর মধ্যে $\mathbb{Q}$ এবং $\mathbb{Q}^c$ দুজনেই dense, মানে rational এবং irrational সংখ্যারা উভয়েই প্রচুর পরিমাণে ছড়িয়ে আছে, $\mathbb{R}$-এর মধ্যে একটানা এমন কোনো interval পাবার জো নেই যেটাতে কোনো rational নেই, বা কোনো irrational নেই। পুরো $\mathbb{R}$-এ rational আর irrational-রা গায়-গায় মিশে গিজ্ গিজ্ করছে। আমাদের $f(x)$-টা প্রতিটি rational x-এ 1 হচ্ছে, পরমুহূর্তেই একটা irrational x-এ এসে 0 হয়ে যাচ্ছে। এই অতি ঘন ঘন ওঠানামার ফলে $f(x)$-এর প্রতিটা point-এই essential discontinuity. যেহেতু rational আর irrational-রা গায়-গায় মিশে আছে, তাই গ্রাফ এঁকে বোঝানো অসম্ভব, তাও Fig 10-এ একটা চেষ্টা করেছি। ■

আমরা এতক্ষণ সহজ ভাষায় গ্রাফ দেখে আলোচনা করলাম। এবার শিখব সেই একই কথা কি করে অংকের ভাষায় লিখতে হয়।

1.1 Definition of continuity

ধর $f : D \to \mathbb{R}$ যেখানে $D \subseteq \mathbb{R}$. তোমাকে একটা $a \in D$ দিলাম। Fig 11 দ্যাখো। দেখাই যাচ্ছে যে $x = a$-তে $f(x)$ হল continuous. কিন্তু এই সহজ কথাটা অংকের ভাষায় প্রকাশ করাটা ঠিক ততটা সহজ নয়। সুতরাং এই বার যা লিখছি সেটা ধীরে ধীরে পড়, প্রথমবারে পুরোটা মাথায় না ঢোকাই স্বাভাবিক, কিছু উদাহরণ করার পরে স্পষ্ট হবে।
"$f(x)$ is continuous at $x = a$" কথাটাকে আমরা এইভাবে দেখতে পারি--

x যতই a-র দিকে এগোচ্ছে, $f(x)$ ততই $f(a)$-র কাছে এগোচ্ছে।

মানে,

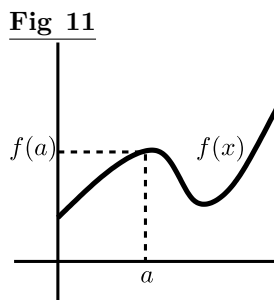
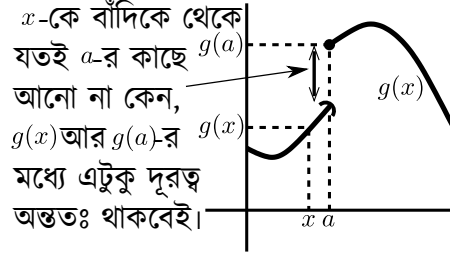



Fig 11

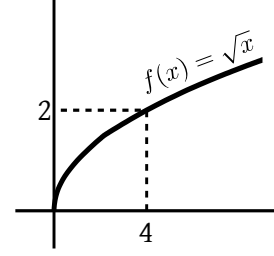



Fig 12 **Fig 13**

তুমি $f(x)$-কে $f(a)$-র যত খুশী কাছে নিতে পারো, খালি তার জন্য x-কে a-র যথেষ্ট কাছে নিতে হবে।

এই কথাটার সঙ্গে Fig 12-এর তুলনা কর। এখানে x বাঁদিক থেকে a-র যত কাছেই আসুক না কেন, $g(x)$ আর $g(a)$-র মধ্যে একটা ন্যূনতম তফাৎ থাকবেই।
এই তফাৎটুকুর জন্যই $g(x)$-টা $x = a$-তে continuous নয়, এবং Fig 11-এ এরকম কোনো তফাৎ নেই বলেই $f(x)$-টা $x = a$-তে continuous.
তাহলে আমরা লিখতে পারি--

$\forall \epsilon > 0$ আমরা যদি x-কে a-র যথেষ্ট কাছে আনি তবে $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ হবে, মানে $f(x) \in N(f(a), \epsilon)$ হবে।

"যথেষ্ট কাছে" আনা মানে $|x - a|$-কে কোনো একটা মানের উপরে যেতে না দেওয়া। এই মানটাকে যদি $\delta > 0$ বলি তবে আমরা $|x - a| < \delta$ রাখলেই $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ হবে, মানে

$\forall \epsilon > 0$ এমন $\delta > 0$ পাব যাতে $x \in N(a, \delta) \cap D$ হলেই $f(x) \in N(f(a), \epsilon)$ হবে।

এখানে $N(a, \delta) \cap D$ নিলাম কারণ $x \in D$ না হলে আবার $f(x)$-টা undefined হয়ে যাবে। তার মানে সব মিলিয়ে দাঁড়ালো--

DEFINITION: Continuity

Let $f : D \to \mathbb{R}$ be any function. Let $a \in D$. We say

"$f(x)$ is continuous at $x = a$"

to mean

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \cap D \quad f(x) \in N(f(a), \epsilon).$$

এই definition-টা যদি একবারে হজম না হয়, তবে চিন্তা কোরো না। এটা মাথায় আসতে বড় বড় পণ্ডিতদেরও বিস্তর সময় লেগেছিল। এবার কয়েকটা উদাহরণ দেখলে ব্যাপারটা পরিষ্কার হবে।

Example 3: এই উদাহরণটার উদ্দেশ্য হল "পেন না তুলে গ্রাফ আঁকা"-র সাথে অংকের ভাষায় লেখা এই definition-টার মিল বুঝতে পারা। Fig 13-এর গ্রাফটা দ্যাখো। চমৎকার দেখা যাচ্ছে যে গ্রাফটা $x = 4$-এ continuous. তার মানে আমি যদি তোমাকে কোনো $\epsilon > 0$ দিই তবে definition অনুযায়ী তুমি আমাকে এমন একটা $\delta > 0$ দিতে পারবে যাতে x যদি 4 থেকে δ দূরত্বের মধ্যে থাকে, তবে $f(x)$ থাকবে $f(4) = 2$ থেকে ϵ দূরত্বের মধ্যে। ধরো তোমাকে $\epsilon = 1$ দিলাম। এর জন্য একটা উপযুক্ত $\delta > 0$ কি করে গ্রাফ থেকে বার করবে?

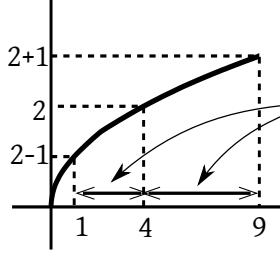
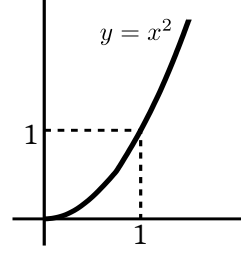



Fig 14 **Fig 15**

SOLUTION: এখানে $a = 4$ আর $f(a) = \sqrt{4} = 2$. আমাদের এমনভাবে $\delta > 0$ নিতে হবে যাতে 4 থেকে x-এর দূরত্ব δ-র চেয়ে কম হলে $f(x)$ থাকবে y-axis-এ $2 - \epsilon$ থেকে $2 + \epsilon$-এর মধ্যে। তাই আমরা প্রথমে y-axis-এ $f(a) \pm \epsilon$ থেকে (মানে $2 - 1$ আর $2 + 1$ থেকে) দুটো horizontal লাইন টানব গ্রাফ পর্যন্ত, এবং তারপর গ্রাফ থেকে vertical লাইন টানব x-axis অবধি। এইভাবে পেলাম Fig 14. যদি x থাকে 1 থেকে 9-এর মধ্যে তবে $f(x)$ অবশ্যই $f(a) - \epsilon$ থেকে $f(a) + \epsilon$-এর মধ্যে থাকতে বাধ্য। সুতরাং δ এমনভাবে নিতে হবে যাতে a থেকে δ দূরত্ব গেলে আমরা $(1, 9)$-এর বাইরে না চলে যাই। তার মানে আমরা δ নিতে পারি

$$\delta = \min\{4 - 1, 9 - 4\} = 3 > 0.$$

এর থেকে ছোটো কোনো $\delta > 0$ নিলেও চলত। ■

উদাহরণটা খুব ঠাণ্ডা মাথায় পড়ে দ্যাখো। কি করে ϵ থেকে δ পেতে হয় বুঝলে তো? এবার এই অংকটা কর--

Exercise 1: Fig 15-এ $f(x) = x^2$-এর গ্রাফ দেওয়া আছে। দেখতেই পাচ্ছো যে এটা $x = 1$-এ continuous. আমি তোমাকে $\epsilon = 0.5$ দিলাম। তুমি আমাকে একটা উপযুক্ত δ দাও। ■

1.2 Definition of discontinuity

এবার দেখি discontinuity-এর সংজ্ঞা অংকের ভাষায় কি। যদি বলি

"$f(x)$ is discontinuous at $x = a$"

তার মানে হল

"$f(x)$ is not continuous at $x = a$"

সুতরাং continuity-র definition-টার negation নিলেই হবে। Continuity-র definition-টা ছিল এইরকম--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \cap D \quad f(x) \in N(f(a), \epsilon).$$

তার negation নিয়ে discontinuity-র definition হবে এইরকম--

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in N(a, \delta) \cap D \quad f(x) \notin N(f(a), \epsilon).$$

অর্থাৎ এমন কোনো ঝামেলাজনক $\epsilon > 0$ পাব যার জন্য যে $\delta > 0$-ই নাও না কেন এমন একটা $x \in N(a, \delta) \cap D$ পাবে যাতে $f(x)$-টা $N(f(a), \epsilon)$-এর বাইরে বেরিয়ে যায়। বেশ গোলমেলে শোনাচ্ছে!
আমরা গ্রাফ দেখে discontinuity বলতে বুঝি গ্রাফের কোথাও একটা ভাঙা আছে। এবার বুঝে দেখা যাক এই ভাঙাটার সঙ্গে এই গোলমেলে কথাটার সম্পর্ক কি।

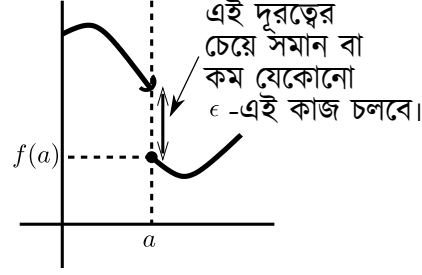
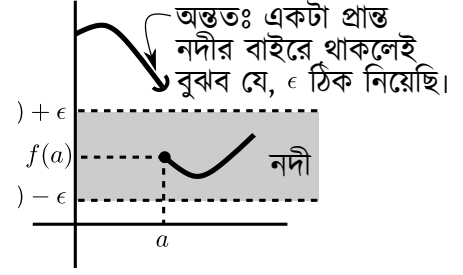



Fig 16 **Fig 17**

Example 4: Fig 16-এর গ্রাফটা দেখেই বুঝতে পারছো যে $x = a$-এ একটা discontinuity আছে। তার মানে একটা ঝামেলাজনক $\epsilon > 0$ পাওয়া যাবে। গ্রাফ দেখে এরকম একটা $\epsilon > 0$ বার কর।

SOLUTION: আমরা প্রথমে ভাঙাটা পরীক্ষা করে দেখি ঠিক কতটা ফাঁক হয়েছে। এর থেকে ছোটো যে কোনো $\epsilon > 0$ নিলেই ঝামেলা বাঁধানো যাবে। Fig 17-এ এরকম একটা ϵ দেখানো হয়েছে। লক্ষ কর x-কে a-এর যত কাছেই (বাঁদিক থেকে) নাও না কেন, $f(x)$ আর $f(a)$-এর দূরত্ব কিছুতেই ϵ-এর থেকে কমবে না। কারণ ওই ভাঙা অংশটার ফাঁকটাই তো ϵ-এর চেয়ে বড়! ■

এই বার যে উদাহরণটা দেখব সেটা একটু অদ্ভুত।

Example 5: ধর $D = [0, 1] \cup [2, 3]$ আর $f : D \to \mathbb{R}$ হল

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{if } x \in [0, 1] \\ 4 - x & \text{if } x \in [2, 3] \end{cases}$$

তাহলে $f(x)$ কি $x = 2$-তে continuous?

SOLUTION: উত্তর হল হ্যাঁ! দেখে অবাক লাগতে পারে, কারণ এই function-টার গ্রাফ (Fig 18) মোটেই $x = 2$-তে পেন না তুলে আঁকা সম্ভব নয়। কিন্তু তাও আমরা একে continuous বলব কারণ পেন তুলতে যে বাধ্য হচ্ছি সেটা $f(x)$-এর দোষে নয়, তার কারণ এখানে D set-টার মধ্যেই একটা ফাঁক আছে।

এবার দেখি এই continuity-টা কি করে definition থেকে প্রমাণ করা যায়। আমাদের দেখাতে হবে--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \cap D \quad f(x) \in N(f(a), \epsilon).$$

প্রথমে যে কোনো একটা $\epsilon > 0$ নিই--

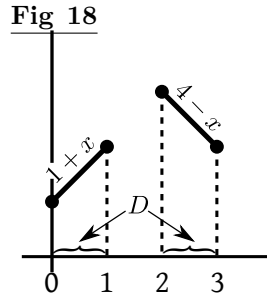



Fig 18

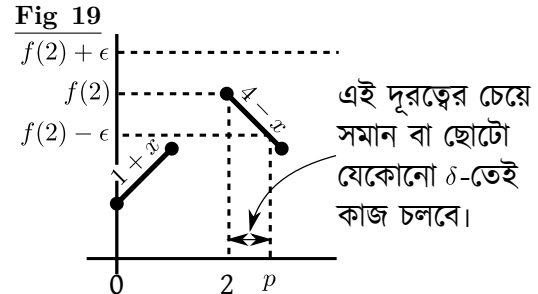



Fig 19

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার $\delta > 0$ নির্বাচনের পালা। ঠিক যেমন করে আগে করেছিলাম এবারও তাই করব, খালি এবার কাজ আরও সহজ, কারণ $x = 2$-তে কোনো বাঁদিকের প্রান্ত নেই। সুতরাং খালি ডানদিকের ব্যবস্থা করতে পারলেই হবে। Fig 19 দ্যাখো। ছবিতে p হল $4 - (f(a) - \epsilon) = 2 + \epsilon$, কারণ $f(a) = f(2) = 2$. সুতরাং $\delta = p - 2 = \epsilon$ নিলেই হবে।

$\exists\delta$ Choose $\delta = \epsilon > 0$.

পরের কাজ সহজ--

 Take any $x \in N(2, \delta) \cap D = [2, 2 + \epsilon)$.

 Then $f(x) = 4 - x \in N(2, \epsilon)$, as required.

নীচের অংকদুটো করার সময়ে খালি মনে রেখো যে, $f : D \to \mathbb{R}$-এর গ্রাফ আঁকতে যদি পেন তুলতে হয় D-এর মধ্যে ফাঁক থাকার কারণে, তবে সেই পেন তোলাটা হিসেবের মধ্যে ধরব না।

Exercise 2: Is the function $f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ defined by $f(1) = 10, f(2) = -7, f(3) = 5$ continuous? ■

Exercise 3: এমন একটা function $f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ দিতে পারো যেটা continuous নয়? ■

এই অংকটা করলেই বুঝবে যে domain-টা যদি কিছু ছাড়া ছাড়া point দিয়ে তৈরী হয় (মানে সবগুলো point-ই isolated point হয়), তবে সব function-ই হয় continuous. এই ধারণার উপরেই পরের অংকটাও দাঁড়িয়ে আছে।

Example 6: Prove or disprove: a sequence is everywhere continuous.[2] **(2013.7d)**

SOLUTION: যেকোনো sequence দেওয়া আছে $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n$. একে আমরা একটা function বলে ভাবতে পারি $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, যেখানে $f(n) = \frac{1}{n}$. প্রশ্ন হল এটা সর্বত্র (মানে $\mathbb{N}$-এর প্রতিটি point-এ) continuous কিনা। উত্তর অবশ্যই হ্যাঁ, কারণ $\mathbb{N}$-এর মধ্যে প্রতিটি point-ই একেকটা isolated point.

Any sequence $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ is a function $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. We shall show that it is everywhere continuous, ie,

 $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall m \in N(n, \delta) \cap \mathbb{N} \quad a(m) \in N(a(n), \epsilon)$.

 Take any $n \in \mathbb{N}$.

 Take any $\epsilon > 0$.

$\mathbb{N}$-এর element-দের মধ্যে 1 করে দূরত্ব। সুতরাং 1-এর চেয়ে ছোটো যেকোনো $\delta > 0$ নিলেই চলবে। ($\delta = 1$ নিলেও চলত।)

$\exists\delta$ Choose $\delta = \frac{1}{2} > 0$.

 Take any $m \in N(n, \delta) \cap \mathbb{N}$.

m, n দুজনেই $\mathbb{N}$-এর সদস্য, এদিকে ওদের মধ্যে দূরত্ব $< \frac{1}{2}$. তার মানে $m = n$ না হয়ে যায় না।

$\because m \in \mathbb{N}$ and $|m - n| < \frac{1}{2}$,

$\therefore m = n$.

$\therefore a(m) = a(n) \in N(a(n), \delta)$, as required.

■

এরপরের অংকটা সামান্য বেশী জটিল। এখানে domain-টা হল $\left\{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. যেহেতু 0-কে রেখেছি তাই সবাই isolated point হচ্ছে না।

Example 7: Prove or disprove: $f : D \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = [x], \quad \forall x \in D$, where

$$D = \left\{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$$

is continuous on D.[3] **(2012.5b)**

SOLUTION: চট্ করে ভেবে নিই $[x]$ কিরকম দেখতে। যদি $x \in [0, 1)$ হয় তবে $[x] = 0$. কিন্তু $x = 1$ হলে $[x] = 1$. তা, আমাদের D-এর সব সদস্যই $[0, 1]$-এর মধ্যে আছে। সুতরাং D-এর সর্বত্রই $f(x) = 0$, খালি 1-এ এসে $f(1) = 1$ হবে। Continuous হবার পথে একমাত্র কাঁটা আসতে পারে $x = 0$-তে, কারণ ওই হল D-এর একমাত্র সদস্য যে isolated point নয়। কিন্তু সৌভাগ্যক্রমে 0-র ধারেকাছে $f(x)$ সব সময়েই 0 থাকছে। সুতরাং continuous হওয়া ঠেকায় কে?

Shall show that f is continuous everywhere on D, ie

 $\forall a \in D \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \cap D \quad f(x) \in N(f(a), \epsilon)$.

 Take any $a \in D$.

 Take any $\epsilon > 0$.

এবার $\delta > 0$ নিতে হবে। $f(x)$-টা এখানে এতই সহজ যে, যে কোনো a-র আর $\epsilon > 0$-এর জন্যই একই δ দিয়ে কাজ চলবে। $f(1)$-কে বাদ দিলে বাকি সর্বত্র f বস্তুতঃ একটা constant function, 0. সুতরাং সে অংশটুকুর জন্য যা খুশি $\delta > 0$ নিলেই চলবে। আর 1-এর বেলায় ব্যবহার করতে হবে যে 1 একটা isolated point, নিকটতম প্রতিবেশী $\frac{1}{2}$-এর থেকে যার দূরত্ব হল $|[|1 - \frac{1}{2}|]| = \frac{1}{2}$. সুতরাং $\delta = \frac{1}{2}$ নিলেই চলবে।

 Choose $\delta = \frac{1}{2} > 0$.

 Take any $x \in N(a, \delta) \cap D$.

Case 1: If $a = 1$, then $x = 1$, since $|x - 1| < \frac{1}{2}$.

$\therefore f(x) = f(1) \in N(f(a), \epsilon)$.

Case 2: If $a \neq 1$, then $a \leq \frac{1}{2}$.

Thus $f(a) = [a] = 0$.

Now $x < a + \frac{1}{2} = 1$.
$\therefore f(x) = [x] = 0 \in N(0, \epsilon) = N(f(a), \epsilon)$.

■

1.3 Continuous function বানানো

আমরা সহজ সহজ continuous function নানাভাবে জুড়ে নতুন নতুন continuous function বানাতে পারি। যেমন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ আর $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এই function দুটোই যদি continuous হয় তবে তাদের যোগ করলে যে function-টা পাব--

$$h(x) = f(x) + g(x),$$

সেটাও continuous হতে বাধ্য। একইভাবে $f(x) - g(x)$ এবং $f(x)g(x)$-ও continuous হবে। একই কথা বলা যায় $f(x)/g(x)$-এর সম্বন্ধেও, যদি $g(x) \neq 0$ হয়। শুধু তাই নয় $f(g(x))$-ও continuous হবে।
এই তথ্যগুলো ব্যবহার করার জন্য আগে কিছু সহজ continuous function জানা থাকা চাই, যাদের জুড়ে জুড়ে নতুন continuous function বানানো যাবে। এরকম কিছু নিত্যব্যবহৃত continuous function-এর তালিকা হল--

Function	Domain
$f(x) \equiv c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \log x$	$(0, \infty)$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$

এখানে $f(x) \equiv c$ মানে $f(x)$-টা x-এর সব value-তেই c-এর সমান।

Example 8: দেখাও যে x^2 এবং $\sqrt{1-x^2}$ (যেখানে $|x| < 1$) হল দুটো continuous function.

SOLUTION: আমরা জানি যে $f(x) = x$ একটা continuous function. সুতরাং $f(x)$-এর সঙ্গে $f(x)$ গুণ করলে পাব x^2, সেটাও continuous function.
আবার জানি যে $g(x) \equiv 1$ একটা continuous function. সুতরাং $h(x) = 1 - x^2$-ও তাই। আরও জানি যে $k(x) = \sqrt{x}$-ও continuous. সুতরাং k-র পেটে h-কে ঢোকালে পাই $k(h(x)) = \sqrt{1-x^2}$, সেটাও continuous হতে বাধ্য। ■

Example 9: If f is a continuous function on $[a, b]$ then show that $|f|$ is also continuous therein.

Is the converse true? Justify your answer.[3] **(2010.5a)**
SOLUTION: f যদি continuous হয় তবে $|f|$ তো continuous হবেই, কারণ $|x|$ হল একটা continuous function, আর একটা continuous function-এর পেটে আরেকটা continuous function ঢোকালে নতুন function-টাও continuous হয়। চাইলে এটাকে সরাসরি definition থেকেও প্রমাণ করতে পারো এইভাবে--

<u>First part:</u>

Take any $c \in [a, b]$. Shall show $|f(x)|$ is continuous at $x = c$,

i.e.,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(c, \delta) \cap [a, b] \quad |f(x)| \in N(|f(c)|, \epsilon).$$

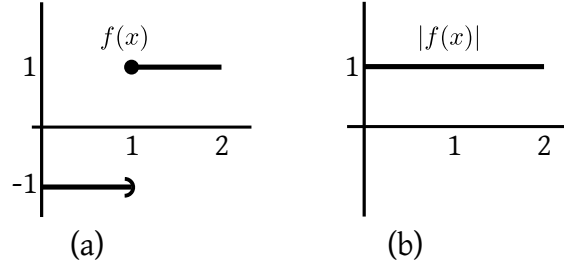



Fig 20

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

মনে রেখো যে, $|f(x)| \in N(|f(c)|, \epsilon)$ মানে $\big||f(x)| - |f(c)|\big| < \epsilon$. আর triangle inequality থেকে পাই $\big||f(x)| - |f(c)|\big| \leq |f(x) - f(c)|$, যেটাকে আমরা যত খুশী ছোটো করতে পারি (যেহেতু f হল continuous)।

$\because f(x)$ is continuous at $x = c$,

$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in N(c, \delta) \cap [a, b] \quad f(x) \in N(f(c), \epsilon),$$

i.e., $|f(x) - f(c)| < \epsilon$.

$\boxed{\exists\delta}$ Choose this $\delta > 0$.

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in N(c, \delta) \cap [a, b]$.

Then

$$\big||f(x)| - |f(c)|\big| \leq |f(x)| - f(c)| < \epsilon,$$

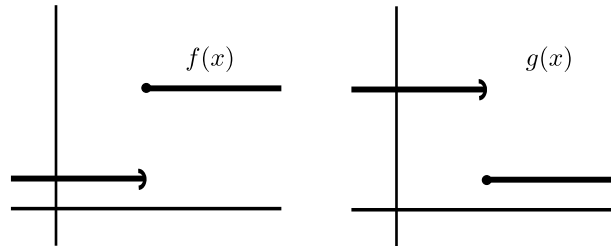
as required.

এবার দেখি converse-টা কি।

Second part:

The converse is:

If $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is such that $|f|$ is continuous, then f must be continuous.

Fig 21

> This is not true.

কেন ঠিক নয় সেটা দেখানোর জন্য একটা counterexample দিতে হবে (Fig 20)--

> Counterexample: $a = 0, \ \ b = 2$ and
>
> $$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{if } x \in [1, 2] \end{cases}$$
>
> Then $f(x)$ is not continuous on $[0, 1]$ but $|f| \equiv 1$ is continuous.

■

Exercise 4: আচ্ছা, যদি দুটো function দিই $f(x)$ আর $g(x)$ যারা দুজনেই $x = a$-তে discontinuous, তবে কি $h(x) = f(x) + g(x)$-ও $x = a$-তে discontinuous হতে বাধ্য? Fig 21-এ দুটো function দেওয়া আছে। সেই দুটো দেখে উত্তর দাও। ■

1.4 Sequential criterion of continuity

যদি $f : D \to \mathbb{R}$ function-টা $x = a$-তে continuous হয়, তবে a-র কাছাকাছি x-এর জন্য $f(x)$ থাকবে $f(a)$-এর কাছাকাছি। সুতরাং যদি একটা sequence নিই $\{a_n\}_n \subseteq D$ যেটা a-র দিকে এগোচ্ছে (মানে $a_n \to a$), তবে $f(a_n)$-গুলোও $f(a)$-র দিকে এগোবে, অর্থাৎ, $f(a_n) \to f(a)$ হবে।
বিপরীতপক্ষে $f : D \to \mathbb{R}$ যদি $x = a$-তে continuous না হয় তবে এমন $\{a_n\}_n \subseteq D$ পাবই যাতে $a_n \to a$ হবে কিন্তু $f(a_n) \not\to f(a)$ হবে।
এই দুটো কথাকে এক সঙ্গে বলে **sequential criterion of continuity**.
আমরা এই দুটো কথাকে এবার একে একে প্রমাণ করব--

Seq. criterion of continuity (I)

Let $D \subseteq \mathbb{R}$ and $a \in D$. Let $f : D \to \mathbb{R}$ be continuous $x = a$. Let $\{a_n\}_n \subseteq D$ be a sequence with $a_n \to a$. Then $f(a_n) \to f(a)$.

Proof: প্রথমে লিখে নেব কি কি দেওয়া আছে--

> Given:
>
> (1) $f(x)$ is continuous at a,
>
> *i.e.*,
>
> $$\forall \epsilon_1 > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \cap D \quad f(x) \in N(f(a), \epsilon_1).$$
>
> (2) $a_n \to a$,

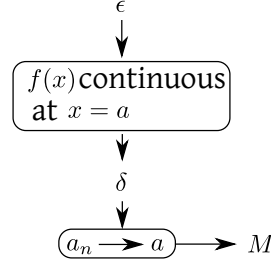



Fig 22

ie., $\{a_n\}_n \subseteq D$ and

$$\forall \epsilon_2 > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad a_n \in N(a, \epsilon_2).$$

লক্ষ কর আমরা দুটো ϵ-কে আলাদা রাখতে ϵ_1 আর ϵ_2 লিখেছি।
এবার লিখি কি দেখাতে হবে--

To show: $f(a_n) \to f(a)$, *i.e.*,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad f(a_n) \in N(f(a), \epsilon)$.

প্রমাণের শুরুটা যথারীতি--

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার $M \in \mathbb{N}$ খুঁজতে হবে--

Putting $\epsilon_1 = \epsilon$ in (1),

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \cap D \quad f(x) \in N(f(a), \epsilon).$$

এই δ-টাকে এবার (2)-এর মধ্যে ব্যবহার করব--

Now taking $\epsilon_2 = \delta$ in (2),

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad a_n \in N(a, \delta).$$

$\boxed{\exists M}$ Choose this $M \in \mathbb{N}$.

এবার আছে $\forall n \geq M$, তাই--

$\boxed{\forall n}$ Take any $n \geq M$.

Then $a_n \in N(a, \delta)$ and $a_n \in D$.
$\therefore a_n \in N(a, \delta) \cap D$.

$\therefore f(x) \in N(f(a), \epsilon)$, as required.

[Q.E.D]

এই প্রমাণটার যুক্তিপরম্পরা বুঝতে সুবিধা হবে Fig 22 দেখলে। আমাদের কাজ ছিল ϵ থেকে M বার করা। আমরা কাজটা করলাম দুইধাপে-- প্রথমে $f(x)$-এর continuity দিয়ে ϵ থেকে δ পেলাম, তারপরে সেই δ লাগিয়ে "$a_n \to a$" ব্যবহার করে পেলাম M.
এবার উল্টো দিকটা প্রমাণ করি--

Seq. criterion of continuity (II)

Let $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ and $a \in D$. If $f(x)$ is discontinuous at $x = a$, then there must exist $\{x_n\}_n \subseteq D$ such that $x_n \to a$. but $f(x_n) \not\to f(a)$.

Proof:

Given: f is discontinuous at $x = a$,
i.e.,

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in N(a, \delta) \cap D \quad f(x) \notin N(f(a), \epsilon). \qquad (*)$$

এটা পেলাম continuity-র সংজ্ঞাটার negation নিয়ে।

To show

$\exists \{x_n\} \subseteq D \quad x_n \to a$ but $f(x_n) \not\to f(a)$.

লক্ষ কর যে (*)-এ $\forall \delta$-র পরে $\exists x$ আছে। তার মানে δ-র বিভিন্ন value নিলে বিভিন্ন x পাওয়া যাবে। আমরা করব কি, $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ ইত্যাদি বসাতে থাকব, তার ফলে পরপর যে x-গুলো পাব তাদের বলব $x_1, x_2, x_3, \dots$ ইত্যাদি। এইভাবে একটা sequence পাব $\{x_n\}_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ taking $\delta = \frac{1}{n} > 0$ in (*), we have

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in N(a, \tfrac{1}{n}) \cap D \quad f(x_n) \notin N(f(a), \epsilon).$$

$\exists \{x_n\}_n$

Choose this $\{x_n\}_n$.

Then $\{x_n\}_n \subseteq D$ is such that

- $x_n \to a$, $(\because |x_n - a| < \frac{1}{n} \to 0)$,
- but $f(x_n) \not\to f(a)$
  $(\because |f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon > 0)$,

as required.

[Q.E.D]

এই বার sequential criterion (I)-এর একটা প্রয়োগ দেখি।

Example 10: If f and g are continuous on the interval $[a, b]$ such that $f(r) = g(r)$ for all rational values r in $[a, b]$, then examine whether $f(x) = g(x)$ for all x.[3] **(2006)**

SOLUTION:

Yes, $f(x) = g(x)$ for all x.
Given: $\forall r \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \quad f(r) = g(r)$.
Shall show:
$\forall x \in [a, b] \quad f(x) = g(x)$.

প্রথমেই $\forall x \in [a, b]$ আছে, তাই--

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in [a, b]$.

এবার আমরা $[a, b]$-র ভিতর একটা rational number-এর sequence বানাব $\{q_n\}_n$ যাতে $q_n \to x$ হয়।

Since $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$, so $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ is dense in $[a, b]$.
So $\exists \{q_n\}_n \subseteq \mathbb{Q} \cap [a, b]$ such that $q_n \to x$.

তারপর sequential criterion of continuity লাগাব--

Since f, g are both continuous on $[a, b]$ so

$$f(q_n) \to f(x) \text{ and } g(q_n) \to g(x).$$

কিন্তু যেহেতু q_n-গুলো সব rational, তাই $f(q_n) = g(q_n)$, অর্থাৎ $\{f(q_n)\}_n$ আর $\{g(q_n)\}_n$ আসলে একই sequence. সুতরাং তাদের limit-ও একই, মানে $f(x) = g(x)$.

But $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(q_n) = g(q_n)$.
So

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} g(q_n) = g(x),$$

as required.

■

নীচের অংক তিনটেও একই কায়দায় হবে।

Exercise 5: If $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous functions and if $f(x) = g(x)$ for every $x \in \mathbb{Q}^c$, then show that $f(x) = g(x)$ for every $x \in \mathbb{Q}$ also. ■

Exercise 6: If $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous functions and if $f(x) = g(x)$ for every $x \in (0, 1)$, then is it true that $f(x) = g(x)$ for $x = 0, 1$? ■

Exercise 7: Let $A \subseteq \mathbb{R}$, and let $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be continuous functions. If $f(x) = g(x)$ for every $x \in A$, then show that $f(x) = g(x)$ for every $x \in \overline{A}$. ■

Exercise 8: নীচে একটা function দেওয়া আছে যেটা $x = 1$-এ discontinuous. তার মানে এমন অন্ততঃ একটা sequence $\{a_n\}_n$ পাওয়া যাবে যাতে $a_n \to 1$ হয় কিন্তু $f(a_n) \not\to f(1)$ হয়। এরকম একটা sequence বার কর।

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < 1 \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

■

নীচের অংকটাও একইরকম।

Example 11: Using sequential criteria show that the function $[x]$ is discontinuous at each $a \in \mathbb{Z}$, where $\mathbb{Z}$ denotes the set of integers.[2] **(2013.5c)**

SOLUTION:

> Let $f(x) = [x]$.
> Take any $a \in \mathbb{Z}$. Consider the sequence $\{x_n\}_n$, where $x_n = a - \frac{1}{n}$.
> Then $x_n \to a$.
> But $f(x_n) = a - 1 \not\to a = f(a)$.
> So by sequential criterion of continuity, f is not continuous at a.

■

এইবার একটা মজার অংক করি।

Example 12: A function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies the condition $f(x+y) = f(x)f(y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}$. If f is continuous at $x = 0$, prove that f is continuous on $\mathbb{R}$.[4] **(2012.7c)**

SOLUTION: একটু গবেষণা করা যাক। দেখা যাচ্ছে যে $f(x)$ আর $f(y)$ জানা থাকলে $f(x+y)$ বার করা যায়। একইসঙ্গে $f(x), f(y)$ আর $f(x+y)$ এই তিনটে জিনিস নিয়ে কাজ করা কঠিন। যদি $x = y = 0$ বসাই, তবে এই তিন জনেই একই $f(0)$ হয়ে যাবে। তাহলে পাব $f(0+0) = \big(f(0)\big)^2$. সুতরাং $f(0) = 0$ বা 1. প্রথমে দেখি $f(0) = 0$ হলে কি হয়--

> <u>Case 1</u>: If $f(0) = 0$, then
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(0+x) = f(0)f(x) = 0.$$
>
> So $f \equiv 0$, and hence continuous.

যদি $f(0) \neq 0$ হয় তবে অবশ্য এত সহজে কাজ হবে না। খালি এটুকু দেখেছি যে $f(0) = 1$ হতে বাধ্য।

Case 2: If $f(0) \neq 0$, then $f(0) = 1$.

⟦ Because:

$f(0) = f(0+0) = f(0)f(0)$, and $\because f(0) \neq 0$, we must have $f(0) = 1$.

⟧

আমাদের বলা আছে যে $f(x)$-টা $x = 0$-তে continuous, এবং সেখান থেকে দেখাতে হবে যে, যেকোনো a-তেই continuous. ধরো $a_n \to a$ নিলাম, দেখাতে হবে $f(a_n) \to f(a)$. এর থেকে কোনোভাবে এমন একটা sequence যদি পেতাম যেটা 0-তে যায়, তবে $x = 0$-তে continuity-টা কাজে লাগানো যেত। এরকম একটা sequence অবশ্য বানানোই যায়, $a_n - a \to 0$. সমস্যা হল $f(a_n - a)$ কি রকম আচরণ করবে বুঝছি না। যে শর্তটা দিয়েছে সেটা $f(x+y)$-এর জন্য। এভাবে লিখি-- $f(a_n - a) = f(a_n + (-a)) = f(a_n)f(-a)$. তার মানে এটুকু বলতে পারছি যে $f(a_n)f(-a) \to f(0) = 1$. মানে $f(a_n) \to \frac{1}{f(-a)}$? তার মানে $f(-a) = 1/f(a)$ দেখাতে পারলেই হবে। কিন্তু যদি $f(a)$ বা $f(-a)$ আবার 0 হয়ে যায়? ভয় নেই, একটু ভাবলেই দেখবে--

Also $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$.

⟦ Because:

If for some $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 0$, then $f(0) = f(x + (-x)) = f(x)f(-x) = 0$.

⟧

Also $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x-y) = f(x)/f(y)$.

⟦ Because:

$f(x) = f((x-y)+y) = f(x-y)f(y)$.
$\because f(y) \neq 0$, $\therefore f(x-y) = f(x)/f(y)$.

⟧

এইবার তবে আমাদের প্ল্যানমত এগোই--

It is given that $f(x)$ is continuous at $x = 0$.

Take any $a \in \mathbb{R}$. Shall show that $f(x)$ is continuous at $x = a$.

Take any sequence $\{a_n\}_n$ such that $a_n \to a$.

Then $a_n - a \to 0$.

$\because f$ is continuous at 0, $f(a_n - a) \to f(0) = 1$.

So $f(a_n)/f(a) \to 1$.

So $f(a_n) \to f(a)$.

Hence, by sequential criterion of continuity, $f(x)$ is continuous at $x = a$.

Since $a \in \mathbb{R}$ is arbitrary, f is continuous everywhere, as required.

■

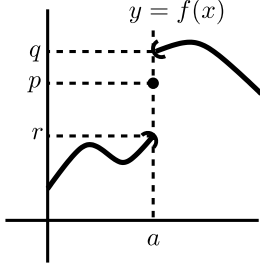
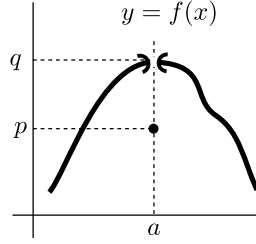
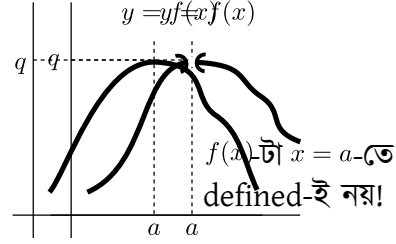



Fig 23 **Fig 24** **Fig 25**

Exercise 9: আগের অংকটারই লেজুড় এটা। ধরো $f(1) = \pi$, এবং $f(x)$-টা $x = 0$-তে continuous. তবে বল তো $f(2)$ কত হবে! আর $f(n)$-ই বা কি হবে যেখানে $n \in \mathbb{N}$? এবার $f(-1)$ বার কর দেখি। $f\left(\frac{1}{2}\right)$ কত হবে? যদি $x \in \mathbb{Q}$ হয় তবে $f(x)$ কত হবে বলে মনে হয়? এবার বল তো $f(\sqrt{2}) = ?$ ■

DAY 2
Limits

সেই উগ্রপন্থীদের রেললাইন ভাঙার উপমা মনে আছে? সেখানে আমরা ভাঙা জায়গাটায় রেললাইনের বাঁদিকের প্রান্ত আর ডানদিকের প্রান্তের কথা বলেছিলাম। গ্রাফ থেকে এই দুই প্রান্তের অবস্থান দেখেই আমরা বিভিন্ন ধরণের discontinuity-কে আলাদা করতে শিখেছি। এই বাঁদিকের প্রান্তটাকে বলে left limit, আর ডানদিকের প্রান্তটাকে বলে right limit. Fig 23 দ্যাখো। এখানে $x = a$-তে $f(x)$-এর value হল p. কিন্তু $x = a$-তে $f(x)$-এর right limit হল q, আর left limit হল r. এই কথাটাকে আমরা সংক্ষেপে লিখব--

$$f(a) = p, \quad f(a+) = q \text{ আর } f(a-) = r.$$

Right limit-কে $f(a+)$ ছাড়া $\lim_{x \to a+} f(x)$ হিসেবেও লেখা যায়। তাই আমরা এভাবেও লিখতে পারতাম--

$$\lim_{x \to a+} f(x) = q \text{ আর } \lim_{x \to a-} f(x) = r$$

এবার Fig 24 দ্যাখো। এখানে x যেদিক দিয়েই a-র কাছে আসুক, সবসময়েই $f(x)$ যাচ্ছে q-এর কাছে। এক্ষেত্রে আমরা বলি যে $x = a$-তে $f(x)$-এর limit হল q. (অর্থাৎ left বা right কথাটা আলাদা করে আর লিখি না।)

2.1 Domain-এর বাইরে limit

আচ্ছা, $\lim_{x \to a} f(x)$ বার করার জন্য কি a-কে $f(x)$-এর domain-এ থাকতে হবে, মানে $f(a)$-টা exist করতে হবে? এমন কি হতে পারে যে $f(a)$ হল undefined, অথচ $\lim_{x \to a} f(x)$, দিব্যি exist করে? উত্তর হল, হ্যাঁ, এমনটা সম্ভব, কিন্তু এই জায়গাটা একটু সাবধানে বুঝতে হবে।

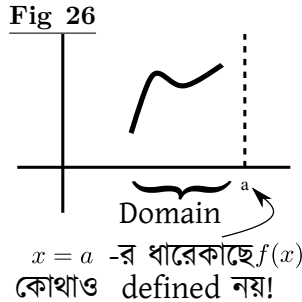



Fig 26

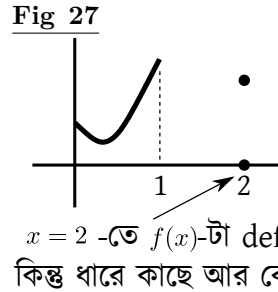



Fig 27

Fig 25-এর গ্রাফটার কথাই ধরো। এখানে $f(a)$ হল undefined. (যেহেতু $x = a$-তে গ্রাফের কোনো বিন্দু নেই)। কিন্তু তাও $\lim_{x\to a} f(x) = q$. সুতরাং $x = a$ function-টার domain of definition-এর বাইরে পড়লেও $\lim_{x\to a} f(x)$ exist করছে। কিন্তু সব সময়েই যে এমনটা হবে এমন কথা নেই, যেমন Fig 26-এর ক্ষেত্রে $f(x)$-এর domain হল D, আর a রয়েছে D থেকে বেশ কিছুটা দূরে। এক্ষেত্রে অবশ্যই $\lim_{x\to a} f(x)$ নিয়ে কথা বলার কোনো মানেই হয় না!
এরকম আরেকটা সম্ভাবনার কথা বলে এই প্রসঙ্গের ইতি টানি। Fig 27-এ $f(x)$-এর domain হল $D = [0, 1] \cup \{2\}$. এখানে $f(2)$ অবশ্যই exist করে, কিন্তু এখানেও $\lim_{x\to 2} f(x)$-এর কোনো মানে হয় না, কারণ 2 রয়েছে D-এর বাকী point-দের থেকে একটু তফাতে।
সুতরাং আশা করি বুঝতে পারছ যে, $f : D \to \mathbb{R}$ হলে কেবল মাত্র তখনই $\lim_{x\to a} f(x)$-এর প্রসঙ্গ তোলা যেতে পারে যখন a হবে D-এর একটা limit point. মনে রেখো যে, a কিন্তু D-এর limit point হলেও $\lim_{x\to a} f(x)$ নাও exist করতে পারে, কিন্তু limit point না হলে exist করার প্রশ্নটাও ওঠে না। ঠিক যেমন যে ছেলে কলেজে ভর্তিই হয় নি, তার পক্ষে কলেজের পরীক্ষায় পাশ করা বা না করার প্রশ্নই নেই।

Exercise 10: যদি $f : D \to \mathbb{R}$ হয় এবং $a \in \mathbb{R}$ হয় তবে $f(a-)$ নিয়ে কেবলমাত্র তখনই কথা বলা যাবে যখন D-র মধ্য দিয়ে ডানদিক থেকে a-র যত খুশী কাছে আসা সম্ভব। অর্থাৎ যেই দূরত্ব $\delta > 0$-ই নিই না কেন, আমরা সব সময়েই D-এর অন্ততঃ একটা point পাব, যেটা a-র বাঁদিকে δ দূরত্বের মধ্যে আছে। এই কথাটাকে অংকের ভাষায় লিখতে পারো? ■

2.2 অংকের ভাষায়

অংকের ভাষায় limit-এর definition লেখা খুব কঠিন কিছু নয়, ঠিক continuity-র মত করলেই হবে। খালি left limit-এর বেলায় x-কে a-র বাঁদিকে থাকতে হবে, আর right limit-এর বেলায় ডানদিকে। প্রথমে left limit-এর definition লেখার চেষ্টা করি--

"$\lim_{x\to a-} f(x) = L$"

মানে

"$f(x)$-কে L-এর যত খুশী কাছে নিতে পারবে যদি x-কে বাঁদিকে থেকে a-র যথেষ্ট কাছে নিয়ে যাও।"

আমরা continuity-র সংজ্ঞা লেখার সময়েই দেখেছি যে "যত খুশী কাছে" বোঝাতে একটা $\forall \epsilon > 0$ লাগে, আর "যথেষ্ট কাছে" বোঝাতে লাগে $\exists \delta > 0$. তার মানে দাঁড়ালো--

DEFINITION: Left hand limit

Let $f : D \to \mathbb{R}$, where $D \subseteq \mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{R}$ be such that $\forall \epsilon > 0 \quad (a - \delta, a) \cap D \neq \phi$.
Then "$\lim_{x\to a-} f(x) = L$" or "$f(a-) = L$"
means

$$\text{“}\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a - \delta, a) \cap D \quad f(x) \in N(L, \epsilon).\text{”}$$

Exercise 11: লক্ষ কর আমরা কেমন $x \in (a - \delta, a)$ লিখেছি, কারণ x-কে থাকতে হবে a-র বাঁদিকে। যদি $(a - \delta, a)$-র জায়গায় $(a, a + \delta)$ লিখতাম তবে পেতাম right hand limit-এর definition. সেটা গুছিয়ে লেখো। ■

ঠিক কোনদিক থেকে x-টা a-র দিকে যাচ্ছে সেটা নিয়ে যদি মাথা না ঘামাই , তবে $f(x)$ যে দিকে যায় তাকে আমরা $\lim_{x\to a} f(x)$ বলি--

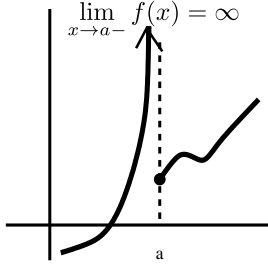
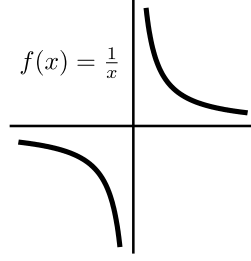
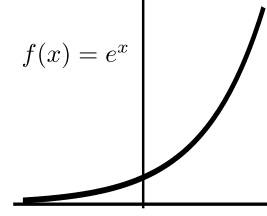



Fig 28 **Fig 29** **Fig 30**

> DEFINITION: **Limit**
>
> Let $f:D\to\mathbb{R}$, where $D\subseteq\mathbb{R}$ and a be a limit point of D. Then
>
> "$\lim_{x\to a} f(x)=L$"
>
> means
>
> "$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in N'(a,\delta)\cap D \quad f(x)\in N(L,\epsilon)$."

Limit মাত্রেই যে একটা finite সংখ্যা হবে এমন কোনো কথা নেই। সেটা ∞ বা $-\infty$ হতে পারে, বা আদৌ exist নাও করতে পারে। এবার আমরা দেখব একটা limit ∞ বা $-\infty$ হওয়া বলতে কি বোঝায়। Fig 28-এ একটা উদাহরণ আছে।

"$\lim_{x\to a-} f(x)=\infty$"

মানে

"তুমি $f(x)$-কে যত খুশী বড় করতে পারবে যদি x-কে বাঁদিক থেকে a-র যথেষ্ট কাছে নিয়ে যাও।"

"যত খুশী বড়" মানে তুমি যেখানেই বেড়া বসাও না কেন এক সময়ে $f(x)$ সেটাকেও টপকে যাবে। মানে যদি তুমি কোনো সংখ্যা M-এ বেড়া বসাও তবে এক সময়ে $f(x)>M$ হয়ে যাবে। সুতরাং লিখতে পারি--

> DEFINITION: **Left hand limit is infinity**
>
> Let $f:D\to\mathbb{R}$ where $D\subseteq\mathbb{R}$ and $a\in\mathbb{R}$ is such that $\forall\delta>0 \quad (a-\delta,a)\cap D\neq\phi$. Then
>
> "$\lim_{x\to a-} f(x)=\infty$"
>
> means
>
> "$\forall M\in\mathbb{R} \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in(a-\delta,a)\cap D \quad f(x)>M$."

Exercise 12: এই যে সংজ্ঞা শিখলাম তার আদলে লেখো "$\lim_{x\to a+} f(x)=\infty$" সংজ্ঞা কি। একই সাথে "$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$" -এর মানেও লিখে দিও। ■

Exercise 13: একই আদলে আরও definition লেখা যায়, যেমন $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$ আর $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. লিখে হাত পাকিয়ে নাও। ■

যেহেতু $N'(a,\delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ সুতরাং আশা করি সন্দেহ নেই যে $\lim_{x\to a+} f(x) = \ell$ হওয়া এবং $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = \ell$ হওয়া সমার্থক। এইবার চট্ করে এই অংকটার উত্তর দাও তো।

Example 13: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = ?$

SOLUTION: অনেক ছাত্রই ফস্ করে উত্তর দেবে যে উত্তর হল ∞. কিন্তু Fig 29 দেখলেই বুঝবে যে $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$ হলেও $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$. সুতরাং $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ দেখা যাচ্ছে exist-ই করে না! ■

এর পরের অংকটাও একই সুরের। এখানে e^x-এর গ্রাফটা একটু মনে করে নাও (Fig 30)।

Example 14: Prove or disprove:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{1/x}+1}$$

exists.[2] **(2013.3c)**

SOLUTION:

> As $x \to 0+$ we know $\frac{1}{x} \to \infty$.
> $\therefore e^{1/x} \to \infty$.

কারণ Fig 30-এর গ্রাফটা ডানদিকে উঠতে উঠতে ∞-র দিকে ছুটেছে।

> $\therefore e^{1/x} + 1 \to \infty$.
> $\therefore \frac{1}{e^{1/x}+1} \to 0$.
> But as $x \to 0-$, we know $\frac{1}{x} \to -\infty$.
> $\therefore e^{1/x} \to 0$.

কারণ Fig 30-এর গ্রাফটা বাঁদিকে ক্রমশঃই x-axis-এর সাথে মিশে যাচ্ছে।

> $\therefore e^{1/x} + 1 \to 1$.
> $\therefore \frac{1}{e^{1/x}+1} \to 1$.

Fig 31

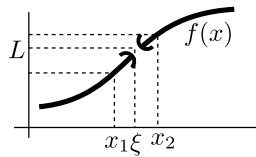
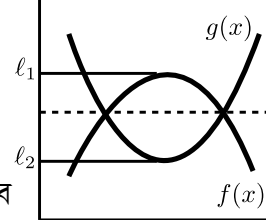



Fig 32

Since the left hand and right hand limits do not match, the given limit does not exist.

■

Example 15: Let $D \subseteq \mathbb{R}$ and $f : D \to \mathbb{R}$ be a function. Let ξ be a limit point of D. If $\lim_{x\to\xi} f(x)$ exists and is finite, then prove that for any $\epsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that for any two points $x_1, x_2 \in N'(\xi, \delta) \cap D$, we have $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ where $N'(\xi, \delta)$ is the deleted δ-neighbourhood of ξ.[3] **(2008)**

SOLUTION: অবস্থাটা Fig 31-এর মত। দেখাতে বলেছে যে যদি x_1, x_2 দুজনেই ξ-এর যথেষ্ট কাছাকাছি হয়, তবে $f(x_1), f(x_2)$-ও পরস্পরের খুব কাছাকাছি আসবে। এবং সেটা কেন হবে সেটা বোঝা কঠিন নয়। যদি $\lim_{x\to\xi} f(x) = L$ হয়, তবে x_1, x_2 যখন ξ-এর খুব কাছে, তখন $f(x_1), f(x_2)$ দুজনেই থাকবে L-এর খুব কাছে। দুজনেই যদি একই সংখ্যার কাছে থাকে, তবে তারা পরস্পরের কাছে থাকতেও বাধ্য!

To show:

$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x_1, x_2 \in N'(\xi, \delta) \cap D \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$

প্রথমেই $\forall\epsilon > 0$ আছে, তাই--

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার একটা $\exists\delta > 0$ আছে, তাই যুৎসই একটা $\delta > 0$ খুঁজব--

Let

$$L = \lim_{x\to\xi} f(x).$$

Then

$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in N'(\xi, \delta) \cap D \quad f(x) \in N(L, \epsilon/2).$$

$\exists\delta$ Choose this $\delta > 0$.

তারপর আছে $\forall x_1, x_2 \in N'(\xi, \delta) \cap D$, সুতরাং--

$\forall x_1, x_2$ Take any $x_1, x_2 \in N'(\xi, \delta) \cap D$.

এবার দেখাতে হবে $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

Then $f(x_1), f(x_2) \in N(L, \epsilon/2)$.

So

$$\begin{aligned}|f(x_1) - f(x_2)| &= |(f(x_1) - L) - (f(x_2) - L)| \\ &\leq |(f(x_1) - L)| + |(f(x_2) - L)| \quad \left[\text{by triangle inequality}\right] \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon,\end{aligned}$$

as required.

■

Example 16: Let f, g be both defined in some deleted neighbourhood $N'(a, \delta)$ of the point a. Let $\lim_{x\to a} f(x) = l_1(\in \mathbb{R})$, $\lim_{x\to a} g(x) = l_2(\in \mathbb{R})$. If $f(x) < g(x)$ in $N'(a, \delta)$, show that $l_1 \leq l_2$. Give an example in which $l_1 = l_2$ holds.[3+2] **(2009)**

SOLUTION: এই অংকটায় শিক্ষণীয় বিষয় এই যে, $f(x), g(x)$-এর মধ্যে সম্পর্কটা যদিও $<$, কিন্তু ওদের limit-এর মধ্যে সম্পর্ক হল $\leq$. এই রকম ব্যাপার আমরা sequence-এর ক্ষেত্রেও দেখেছি, $\frac{1}{n} > 0$ হলেও limit-টা হল $= 0$. Limit নিলে কিভাবে $<$ থেকে $\leq$ (বা $>$ থেকে $\geq$) আসে সেটা দেখানোই এই অংকের উদ্দেশ্য।

দেখাতে বলেছে $l_1 \leq l_2$. আমরা এখানে proof by contradiction ব্যবহার করব, তাই শুরু করব ঠিক এর উল্টোটা ধরে নিয়ে--

Let, if possible, $l_1 > l_2$.

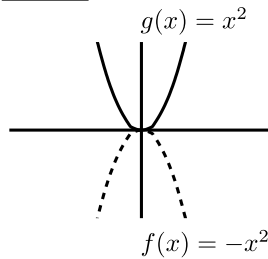
এবার Fig 32 দ্যাখো। আমরা l_1 আর l_2-র ঠিক মাঝখান দিয়ে একটা ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইন টেনেছি। যেহেতু $f(x)$ যাবে l_1-এ সুতরাং একসময়ে $f(x)$-কে এই লাইনটার উপরে উঠতেই হবে। আবার একই ভাবে l_2-তে যাবার জন্য $g(x)$ এই লাইনটার নীচে নামতেই হবে। অমনি আমরা একটা contradiction পাব, কারণ তখন $f(x) > g(x)$ হবে, কিন্তু বলা আছে যে সবসময়ে $f(x) < g(x)$.

Take $\epsilon = \frac{1}{2}(l_1 - l_2) > 0$.

অর্থাৎ ϵ হল ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনটা থেকে l_1 এবং l_2-র দূরত্ব।

Since $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$,

$$\exists \delta_1 > 0 \forall x \in N'(a, \delta_1) \quad f(x) \in N(l_1, \epsilon).$$

Fig 33

Similarly, since $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$,

$$\exists\delta_2 > 0 \quad \forall x \in N'(a, \delta_2) \quad g(x) \in N(l_2, \epsilon).$$

Thus, for $x \in N'(a, \min\{\delta_1, \delta_2\})$, we have

$$f(x) > l_1 - \epsilon = \frac{l_1 + l_2}{2},$$

and

$$g(x) < l_2 + \epsilon = \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

$\therefore f(x) > g(x) (\Rightarrow\Leftarrow \quad \because f(x) < g(x))$.

This contradiction proves the result.

পরের অংশের জন্য Fig 33 দ্যাখো।

An example with $l_1 = l_2$:

Take $f(x) = -x^2,\ g(x) = x^2$ and $a = 0$.

Then $\forall x \in N'(0, 1)$ we have $f(x) < g(x)$.

But

$$l_1 = \lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x) = l_2.$$

■

Example 17: Let $f, g : D \to \mathbb{R}$ where $D \subseteq \mathbb{R}$. Let p be an accumulation point of D. If $\lim_{x\to p} f(x)$ exists finitely and is equal to zero, and g is bounded on D, then show that $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$.[2] **(2007)**

SOLUTION:

এই অংকের ভাষাটা হাস্যকর-- বলেছে "$\lim_{x\to p} f(x)$ exists finitely and is equal to zero." যেখানে খালি $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ বললেই চলত।

যাই হোক প্রথমে লিখে নিই কি দেওয়া আছে--

Given:

(1) $\lim_{x\to p} f(x) = 0$,

i.e.,

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in N'(p, \delta) \cap D \quad f(x) \in N(0, \epsilon).$$

(2) g is bounded on D,

i.e.,

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in D \quad |g(x)| < M.$$

আর কি দেখাতে হবে--

To show: $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0$,

i.e.,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \forall x \in N'(p, \delta) \cap D \quad f(x)g(x) \in N(0, \epsilon).$$

প্রথমেই $\forall \epsilon > 0$ আছে, তাই--

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার $\exists \delta > 0$ আছে, তার মানে যুৎসই একটা $\delta > 0$ বার করা চাই--

Putting $\frac{\epsilon}{M}$ in place of ϵ in (1), we have $\delta > 0$ such that

$$\forall x \in N'(p, \delta) \cap D \quad f(x) \in N\left(0, \frac{\epsilon}{M}\right),$$

i.e., $|f(x)| \leq \epsilon / M$.

$\boxed{\exists \delta}$ Choose this $\delta > 0$.

এবার আছে $\forall x \in N'(p, \delta) \cap D$, সুতরাং--

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in N'(p, \delta) \cap D$.

দেখাতে হবে $f(x)g(x) \in N(0, \epsilon)$.

Then

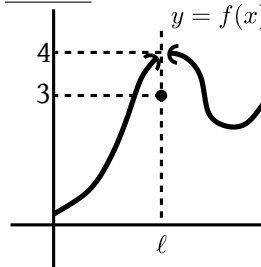
$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)|M < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon,$$

i.e., $f(x)g(x) \in N(0, \epsilon)$, as required.

■

2.3 Sequential criterion of limit

অনেক অংকে আমাদের দেখাতে হয় যে কোনো একটা limit exist করে না। এটা অবশ্যই আমরা সরাসরি definition থেকে দেখাতে পারি, কিন্তু অনেক সময়ে একটা জিনিস ব্যবহার করলে সুবিধা হয়, তাকে বলে sequential criterion of limit.

Fig 34

ধরো $D \subseteq \mathbb{R}$ আর $f : D \to \mathbb{R}$ একটা যে কোনো function, যাতে $\lim_{x\to\ell} f(x) = L$ হয়। এখানে L যেকোনো সংখ্যা, আর ℓ হল D-এর যেকোনো limit point(নইলে limit-টার মানে হয় না)। এবার একটা sequence $\{a_n\}_n \subseteq D$ নিই যেটা ℓ-এ converge করে, কিন্তু $a_n \neq \ell$ হয়, তবে বুঝতেই পারছ যে $f(a_n)$-গুলোও L-এ converge করবে। এখানে $a_n \neq \ell$ কেন নিয়েছিলাম বুঝলে? কারণ, $\lim_{x\to\ell} f(x) = L$ মানে ℓ-এর খুব কাছের x-এর জন্য $f(x)$ থাকবে L-এর খুব কাছে। কিন্তু তা বলে $f(\ell)$ নিজে যে L-এর ধারেকাছে থাকবে এমন কোনো কথা নেই, এমন কি $f(\ell)$ নিজে undefined-ও হতে পারে। নীচের অংকটা করলে ব্যাপারটা স্পষ্ট হবে।

Exercise 14: Fig 34-এ একটা $f(x)$ আর ℓ দেওয়া আছে। এখানে L কত? যদি $a_n \equiv \ell$ নিতাম তবে $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$ হত কি? ■

এর বিপরীত কথাটাও কিন্তু সত্য-- যদি $\lim_{x\to\ell} f(x) \neq L$ তবে অবশ্যই এমন কোনো sequence $\{a_n\}_n \subseteq D$ পাওয়া যাবে যাতে $a_n \to \ell$ হয় কিন্তু $f(a_n) \not\to L$. এই দুটোকে এক সাথে বলে sequential criterion of limit.

Example 18: Let the function f defined in some deleted neighbourhood I of a be such that $\lim_{x\to a} f(x) = L$, a finite number. Show that for every sequence $\{x_n\}_n$, $x_n \in I$, converging to a, $\{f(x_n)\}_n$ will converge to L.[3] **(2004)**

SOLUTION: কি দিয়েছে?

Given:

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = L$,

i.e.,

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in N'(a, \delta) \cap I \quad f(x) \in N(L, \epsilon).$$

(2) $x_n \to a$,

i.e.,

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad x_n \in N(a, \epsilon).$$

and

(3) I is a deleted neighbourhood of a, and $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in I$.

কি দেখাতে হবে?

To show $f(x_n) \to L$,

i.e.,

$\forall\epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad f(x_n) \in N(L, \epsilon).$

প্রথমেই $\forall\epsilon > 0$ আছে, তাই--

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার $\exists M \in \mathbb{N}$ আছে, তাই একটা উপযুক্ত $M \in \mathbb{N}$ চাই--

From (1) we get $\delta > 0$ such that

$$\forall x \in N'(a, \delta) \cap I \quad f(x) \in N(L, \epsilon).$$

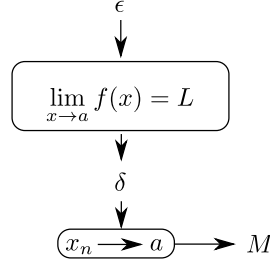



Fig 35

$\exists M$ Putting δ in place of ϵ in (2) we get $M \in \mathbb{N}$ such that $\forall n \geq M \quad x_n \in N(a, \delta)$.
Choose this $M \in \mathbb{N}$.

এবার আছে $\forall n \geq M$. সুতরাং--

$\forall n$ Take any $n \geq M$.

শেষ কাজ হল এটা দেখানো যে $f(x_n) \in N(L, \epsilon)$.

Now $\because a \notin I$ and $x_n \in I$,
$\therefore x_n \neq a$.
$\therefore x_n \in N'(a, \delta)$.
$\therefore f(x_n) \in N(L, \epsilon)$, as required.

প্রমাণের কাঠামোটা স্পষ্ট হবে Fig 35 দেখলে। ■

এই অংকটায় আলাদা করে বলে দিয়েছে বটে যে L একটা finite number, কিন্তু যদি $L = \infty$ বা $L = -\infty$-ও হত, তাতেও অংকটা ঠিক থাকত। যেমন $L = \infty$-র জন্য আমরা নীচের অংকটা পাব। সমাধান একই কায়দায় হবে।

Exercise 15: Let the function f defined in some deleted neighbourhood I of a be such that $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Show that for every sequence $\{x_n\}_n \subseteq I$ converging to a, we have $f(x_n) \to \infty$. ■

একই ভাবে sequential criterion of left hand limit আর sequential criterion of right hand limit-ও আছে। নীচের অংক দুটোতে এগুলো প্রমাণ করতে দিয়েছে।

Exercise 16: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Let $c \in [a, b)$. Let $f(c+) = L$. Let $\{x_n\}_n \subseteq (c, b]$ be such that $x_n \to c$. Then show that $f(x_n) \to L$. ■

Exercise 17: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Let $c \in (a, b]$. Let $f(c-) = L$. Let $\{x_n\}_n \subseteq [a, c)$ be such that $x_n \to c$. Then show that $f(x_n) \to L$. ■

এই জিনিসটার মূল প্রয়োগ হল কোনো function-এর limit নেই দেখাতে। ধর তোমাকে একটা function $f : D \to \mathbb{R}$ দিয়ে দেখাতে বলল যে $\lim_{x\to a} f(x)$ exist করে না। তাহলে আমরা এমন দুটো sequence $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n \subseteq D$ খুঁজব যাতে $a_n \to a$ এবং $b_n \to a$ হয়, কিন্তু $f(a_n)$ আর $f(b_n)$-এর limit আলাদা হয়। তা থেকেই আমরা সিদ্ধান্ত করতে পারব যে $\lim_{x\to a} f(x)$ exist করতে পারে না, কারণ যদি তা করত তবে তো $f(a_n), f(b_n)$ দুজনেই সেই একই limit-এই যেত।

Exercise 18: ধরো $f(x) = [x]$. তোমাকে দেখাতে হবে যে $\lim_{x\to 1} f(x)$ exist করে না। এই দুটো sequence নাও, $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ আর $b_n = 1 - \frac{1}{n}$. তাহলে $a_n, b_n \to 0$. এবার $f(a_n)$ আর $f(b_n)$-এর limit বার কর। এরা কি সমান? ■

Example 19: Using sequential criterion show that $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ does not exist.[2] **(2011)**

SOLUTION:

Let, for $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{2}{(2n-1)\pi} \text{ and } b_n = \frac{1}{2n\pi}.$$

Then $a_n \to 0$ and $b_n \to 0$.

But $f(a_n) \equiv 0 \to 0$ and $f(b_n) \equiv 1 \not\to 0$.

Since the two limits are different, hence by sequential criterion of limit, $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ does not exist.

■

DAY 3
Limits of monotone functions

Example 20: Let $I = (a, b)$ be an open interval. Let $f : I \to \mathbb{R}$ be monotonic increasing on I. Prove that at any point $c \in I$,

$$f(c+0) = \inf\{f(x) \ : \ x \in (c, b)\}.$$

[3] **(2009)**

Fig 36

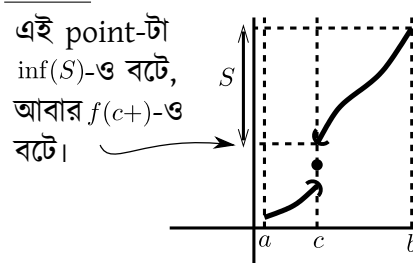
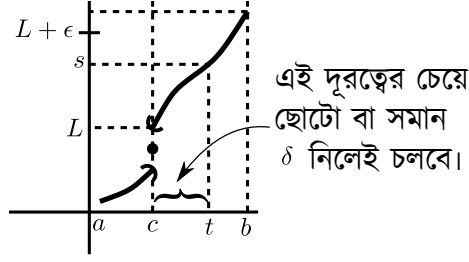



Fig 37

SOLUTION: এখানে $f(c+0)$ বলতে $f(c+)$ বোঝানো হয়েছে। $f(c+0)$ notation-টা মোটেই standard নয়, ওটা ব্যবহার না করাই ভালো।
প্রথমে ডানদিকের set-টার একটা নাম দিয়ে নিই--

Let
$$S = \{f(x) \;:\; x \in (c, b)\}$$

Fig 36-এ একটা উদাহরণ দেখানো হয়েছে। ছবি দেখে বুঝে নাও যে সত্যিই $f(c+) = \inf S$.
এখন $\inf S$ নিয়ে কাজ করার আগে দেখে নিতে হবে যে S-এর infimum আদৌ আছে কিনা, মানে দেখতে হবে যে S-টা nonempty এবং bounded from below কিনা। S-কে nonempty দেখানোর জন্য (c, b) থেকে যে কোনো x নিতে হবে, তাহলেই $f(x) \in S$ হবে। এরকম একটা x হতে পারে $x = \frac{c+b}{2}$.

S is nonempty ($\because f(\frac{c+b}{2}) \in S$), and bounded from below (by $f(c)$).

⟦ Because:

$\because f$ is monotonically increasing,

$\therefore \forall x \in (c, b) \quad c < x \implies f(c) \le f(x)$.

⟧

So $L = \inf S \in \mathbb{R}$.

এইবার দেখাব যে এই L-ই হল $f(c+)$. অংকের ভাষায় লিখে নিই কি দেখাতে চলেছি--

To show $f(c+) = L$,

i.e.,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (c, c+\delta) \cap I \quad f(x) \in N(L, \epsilon)$.

যেহেতু প্রথমে $\forall \epsilon > 0$ আছে, তাই--

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার $\exists \delta > 0$ আছে, সুতরাং একটা যুৎসই $\delta > 0$ বার করতে হবে। Fig 37 দ্যাখো।

$\because L = \inf S$,

$\therefore \exists s \in S \quad s < L + \epsilon$.

By definition of S, we must have $s = f(t)$ for some $t \in (c, b)$.

$\boxed{\exists\delta}$ Choose $\delta = t - c > 0$.

এবার আছে $\forall x \in (c, c+\delta) \cap I$. লক্ষ কর $(c, c+\delta) = (c, t)$. এখন যেহেতু $t \in (c, b)$ তাই $(c, t) \subseteq (a, b) = I$. অতএব $(c, c+\delta) \cap I = (c, t)$.

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in (c, c+\delta) \cap I = (c, t)$.

এবার খালি দেখানো বাকি যে $f(x) \in N(f(a), \epsilon)$.

Then $f(x) \leq f(t) < L + \epsilon$, since f is monotonic increasing.

Also, since L is a lower bound for S,

so $L \leq f(x)$.

Hence

$$\forall x \in (c, c+\delta) \quad f(x) \in [L, L+\epsilon) \subseteq N(L, \epsilon),$$

as required.

■

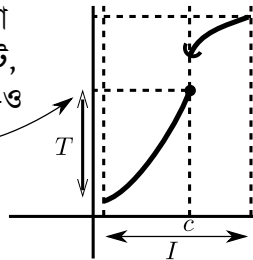
নীচের অংকটা এই অংকটাকেই একটু রদবদল করে তৈরী। ওখানে inf নিয়ে কাজ করেছিলে, এখানে sup নিয়ে করবে, এই যা তফাৎ।

Exercise 19: Let $I = (a, b)$ be an open interval. Let $f : I \to \mathbb{R}$ be monotonic increasing on I. Prove that at any point $c \in I$,

$$f(c-) = \sup\{f(x) \ : \ x \in (a, c)\}.$$

[3] ■

Example 21: Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a monotone increasing function on the interval I, and c be an

Fig 38

interior point of I. Prove that $f(c-0)$ exists.[3] **(2007)**
SOLUTION: এটা আগের অংকটারই সামান্য পরিবর্তিত সংস্করণ। খালি এখানে sup-এর কথাটা প্রশ্নে উল্লেখ করে দেয় নি।

Let
$$T = \{f(x) \ : \ x < c\}$$
Shall show that
$$f(c-) = \sup\{f(x) : x < c\}.$$

Fig 38 দ্যাখো। এখন $\sup T$ নিয়ে কাজ করার আগে দেখে নিতে হবে যে T-এর supremum আদৌ আছে কিনা, মানে দেখতে হবে যে T একটা nonempty, bounded from above set কিনা।

Now $T \neq \phi$.

⟦ Because:

$\because c$ is an interior point of I,
$\therefore \exists \delta > 0 \quad N(c,\delta) \subseteq I$.
$\therefore f(c - \frac{\delta}{2}) \in S$.

⟧

Also T is bounded from above (by $f(c)$).

⟦ Because:

$\because f$ is monotonically increasing,
$\forall x < c \ \ f(x) \leq f(c)$.

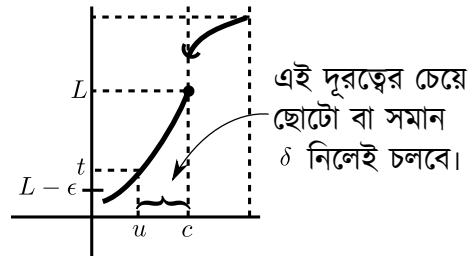
⟧

So $L = \sup T \in \mathbb{R}$

কি দেখাতে হবে সেটা অংকের ভাষায় লিখে নিই--

To show $f(c-) = L$,
i.e.,
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c) \quad f(x) \in N(L,\epsilon).$$

প্রথমে $\forall \epsilon > 0$ আছে, তাই--

Fig 39

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

তারপর আছে $\exists\delta > 0$ সুতরাং উপযুক্ত $\delta > 0$ খোঁজার পালা। Fig 39 দ্যাখো।

$\because L = \sup T$,

$\therefore \exists t \in T$ with $t > L - \epsilon$.

By definition of T, we must have $t = f(u)$ for some $u < c$.

$\boxed{\exists\delta}$ Choose $\delta = c - u > 0$.

এরপর আছে $\forall x \in (c - \delta, c)$. অতএব--

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in (c - \delta, c) = (u, c)$.

এবার দেখাতে হবে যে $f(x) \in N(L, \epsilon)$.

Then $f(x) \geq f(t) > L - \epsilon$, since f is monotonic increasing.

Also, since L is an upper bound for S,

so $f(x) \leq L$.

$$\therefore \forall x \in (c - \delta, c) \quad f(x) \in (L - \epsilon, L] \subseteq N(L, \epsilon),$$

as required.

■

Exercise 20: If f is a monotonically increasing function on (a, b) then show that $f(x-)$ and $f(x+)$ exist at any point $x \in (a, b)$[3] **(2006)**

HINT:

আগের অংকদুটো মিলিয়ে এই অংকটা তৈরী। ■

Example 22: If $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is monotone nondecreasing, then show that $f(x+)$ exists in (a, b) and $f(x-)$ exists in (a, b). Deduce that f is continuous at a point x in (a, b) if $f(x+) = f(x-)$.[2+2+2] **(2000)**

SOLUTION: প্রথম অংশ আগের মতই, তাই আর নতুন করে করছি না। দ্বিতীয় অংশে কিছু নতুনত্ব আছে--

Second part:

Enough to show that $f(x) = f(x+) = f(x-)$

এদিকে দেওয়াই আছে যে $f(x+) = f(x-)$. সুতরাং যদি দেখাতে পারি যে $f(x)$-টা সবসময়েই $f(x-)$ আর $f(x+)$-এর মাঝখানে থাকবে, তবেই কেল্লা ফতে! কারণ সেক্ষেত্রে $f(x-) = f(x) = f(x+)$ হতে বাধ্য।

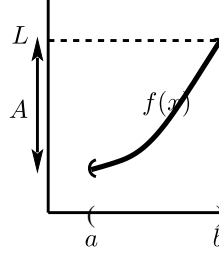



Fig 40

> $\because f(x-) = f(x+)$,
> $\therefore$ enough to show $f(x-) \leq f(x) \leq f(x+)$.

আগের অংকে যে ভাবে S, T নিয়েছিলাম এই অংকের প্রথম অংশেও সেভাবেই নিয়েছি। অর্থাৎ

$$T = \{f(t) \ : \ t \in (a, x)\} \text{ আর } S = \{f(t) \ : \ t \in (x, b)\}.$$

প্রথম অংশেই দেখিয়েছি যে $f(x-) = \sup T$ আর $f(x+) = \inf S$.

> We have seen that $f(x-) = \sup T$.
> Also, $f(x)$ is an upper bound of T, since f is nondecreasing.
> So $f(x-) = \sup T \leq f(x)$.
> Similarly, $f(x)$ is a lower bound of B. So $f(x+) = \inf B \geq f(x)$, completing the proof.

■

Example 23: Let a monotone increasing function f be bounded above on the bounded open interval $]a, b[$. Show that $\lim_{x \to b-} f(x)$ exists.[3] **(2005)**

SOLUTION:

এই অংকটা পড়ার সময়ে মনে রেখো যে $]a, b[$ মানে (a, b). Fig 40 দেখলেই দেখবে যে $f(x)$ ক্রমশঃই উপরদিকে উঠছে। সুতরাং x যখন একেবারে ডানপ্রান্তে b-এর কাছে পৌঁছবে, তখন $f(x)$ পৌঁছবে L-এর কাছে। $f(x)$-এর যাবতীয় value-র set-কে আমরা A নাম দিয়েছি, L হল A-র supremum.

> Let $A = \{f(x) : x \in (a, b)\}$.
> Shall show that
> $$\lim_{x \to b-} f(x) = \sup A.$$

অবশ্যই এটা দেখাবার আগে প্রথমে দেখাতে হবে যে supremum-টা সত্যিই আছে, মানে A set-টা nonempty এবং bounded from above.

Now $A \neq \phi$, since $f(\frac{a+b}{2}) \in A$.

Also, A is bounded above, since f is given to be bounded above.

So $\sup A$ exists in $\mathbb{R}$.

Let $L = \sup A$.

এইবার দেখাব যে $\lim_{x\to b-} f(x)$ এই supremum-এর সমান।

To show that $\lim_{x\to b-} f(x) = L$, *i.e.*,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (b-\delta, b) \cap D \quad f(x) \in N(L, \epsilon)$,

where $D = (a, b)$.

প্রথমেই $\forall \epsilon > 0$ আছে, তাই--

Take any $\epsilon > 0$.

এবার আছে $\exists \delta > 0$ সুতরাং একটা উপযুক্ত $\delta > 0$ খুঁজে বার করি।

$\because L = \sup A, \quad \therefore \exists c \in (a, b) \quad f(c) > L - \epsilon$.

$\exists\delta$ Choose $\delta = b - c > 0$.

এরপর আছে $\forall x \in (b-\delta, b) \cap D$. লক্ষ কর যে, $b - \delta = c > a$. তাই $(b-\delta, b) = (c, b) \subseteq D$. ফলে $(b-\delta, b) \cap D = (c, b)$.

Take any $x \in (b-\delta, b) \cap D = (c, b)$.

দেখাতে হবে যে $f(x) \in N(L, \epsilon)$.

$\because f$ is increasing, $\therefore f(x) > f(c) > L - \epsilon$.

Also, $\because L = \sup A, \quad \therefore f(x) \leq L$.

$\therefore f(x) \in (L-\epsilon, L] \subseteq N(L, \epsilon)$ as required.

■

একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে, এই সবগুলো অংকেরই মূল কায়দাটা একই। নীচের অংকটাও একইভাবে করা যায়।

Exercise 21: Let a monotone increasing function $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ be bounded below. Show that $\lim_{x\to a+} f(x)$ exists.[3] ■

নীচের অংকটাও একই জিনিসের আরেক অবতার, খালি এবার কাজ করতে বলেছে decreasing function নিয়ে।

Exercise 22: Let $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ be a monotonically decreasing function and $c \in (a, b)$. Prove that $\lim_{x\to c+} f(x)$ exists finitely.[3] **(2013.6a)**

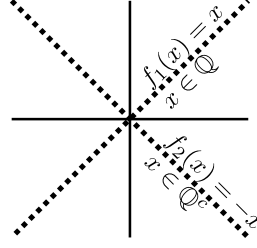
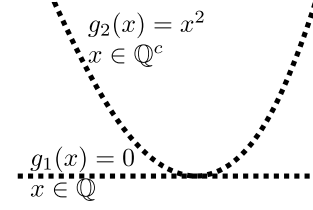



Fig 41 **Fig 42**

HINT:
এখানে limit-টা হবে $\sup\{f(x) : x \in (c,b)\}$. কিন্তু এই sup-টা যে exist করে কি করে জানলাম? কারণ $(c,b) \neq \phi$, তাই $\{f(x) \; : \; x \in (c,b)\} \neq \phi$. এবার দেখাব যে এই set-টা bounded above-ও বটে। যে কোনো একটা সংখ্যা নাও (a,c)-র মধ্যে, ধরো $(a+c)/2$. যেহেতু বলেছে f হল decreasing, তাই যাই $x \in (c,b)$ নাও না কেন $f(x) \leq f\left(\frac{a+c}{2}\right)$ হবে। তার মানে $f\left(\frac{a+c}{2}\right)$ হল $\{f(x) \; : \; x \in (c,b)\}$-এর একটা upper bound. ব্যস্ supremum পেয়ে গেলে। এবার আগের অংকের মতই। ■

3.1 একধরণের মজার অংক

এবার একধরণের মজার অংকের কথা বলব যেগুলো কায়দাটা না জানলে খুব কঠিন মনে হতে পারে, কিন্তু কায়দাটা জানলে এক্কেবারে সহজ। ধরো তোমায় এই ধাঁধাটা দিলাম--এমন একটা $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ দিতে পারো যেটা x-এর খালি একটা মাত্র value-তেই continuous? উত্তরটা বলে দিচ্ছি এক্ষুণি। কিন্তু সেটা পড়ার আগে নিজে নিজে চিন্তা করে নাও, একবার কায়দাটা জেনে ফেললে কিন্তু ধাঁধার মজাটা আর পাবে না!
অনেক উত্তর আছে ধাঁধাটার। প্রথমে যে কোনো দুটো continuous function নাও, যাদের গ্রাফ খালি একটা বিন্দুতেই পরস্পরকে ছেদ করে বা স্পর্শ করে। যেমন ধরো $f_1(x) = x$ আর $f_2(x) = -x$, বা $g_1(x) \equiv 0$ আর $g_2(x) = x^2$. এদের মিলিয়ে একটা নতুন function বানাবো এইভাবে, যদি $x \in \mathbb{Q}$ হয় তবে একটা function নেব, আর $x \in \mathbb{Q}^c$ হলে অন্যটা নেব। যেমন f_1, f_2 থেকে পেতে পারি--

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x) & \text{if } x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}.$$

এরকম $f(x)$-এর ছবি আঁকা মুস্কিল, তাও একটা চেষ্টা করেছি Fig 41-এ। বস্তুতঃ একই গ্রাফে f_1 আর f_2-র গ্রাফ এঁকে দিয়েছি, খালি টানা লাইন না টেনে গুঁড়োগুঁড়ো করে এঁকেছি। f_1-এর বেলায় গুঁড়োগুলো আছে $\mathbb{Q}$-এর উপর, আর তার ফাঁকে ফাঁকে (মানে $\mathbb{Q}^c$-এর উপর) গুঁড়োগুলো বসিয়েছি f_2 বরাবর। বুঝতেই পারছ যে x যখন x-axis বরাবর কোনো দিকে এগোবে, $f(x)$-টা এই দুটো লাইনের মধ্যে লাফালাফি করতে থাকবে। খালি এক জায়গাতেই এই লাফালাফি কমতে কমতে 0 হবে, সেটা হল যেখানে দুটো লাইন এক হয়েছে, মানে $x = 0$-তে। তাই $f(x)$ খালি $x = 0$-তেই continuous, বাকি সর্বত্র discontinuous. একই রকম যুক্তি খাটবে যদি f_1, f_2-এর বদলে g_1, g_2 নিতাম (Fig 42)। এই যুক্তিটা অংকের ভাষায় গুছিয়ে লেখা কঠিন নয়। নীচের অংকটায় সেটাই করে দেখিয়েছি।

Example 24: Show that the function f defined on $\mathbb{R}$ by

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \text{ is rational} \\ -x & \text{otherwise} \end{cases}$$

is continuous only at 0.[3] **(2002)**
SOLUTION: গ্রাফটা তো Fig 41-এর দেখিয়েইছি।

<u>Step 1</u>: To show f is continuous at 0, *i.e.*,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(0, \delta) \quad f(x) \in N(f(0), \epsilon)$.

প্রথমেই $\forall \epsilon > 0$ আছে, তাই--

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এর পরের কাজ $\delta > 0$ নির্বাচন, যেটা এক্ষেত্রে নিতান্তই সহজ--

$\boxed{\exists\delta}$ Choose $\delta = \epsilon$.

এবার আছে $\forall x \in N(0, \delta)$, অতএব--

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in N(0, \delta)$.

দেখাতে হবে $f(x) \in N(f(0), \epsilon)$.

Shall show $f(x) \in N(f(0), \epsilon)$.
Now $|f(x)| = |x| < \delta = \epsilon$,

যেহেতু absolute value নিয়েছি, তাই x rational বা irrational যাই হোক না কেন, সব সময়েই $|f(x)| = |x|$ হবে।

i.e., $f(x) \in N(0, \epsilon) = N(f(0), \epsilon)$,
Since $f(0) = 0$, completing step 1.

এবার দেখাতে হবে যে $a \neq 0$ হলে $f(x)$ মোটেই $x = a$-তে continuous নয়। তার জন্য ঠিক আগের অংকটার মত sequential criterion of limit লাগাব।

<u>Step 2</u>: f is not continuous at any $a \neq 0$:
Since $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$,
So $\exists \{x_n\}_n \subseteq \mathbb{Q}$ with $x_n \to a$.

এই হল প্রথম sequence.

Similarly, Since $\mathbb{Q}^c$ is dense in $\mathbb{R}$,
So $\exists \{y_n\}_n \subseteq \mathbb{Q}^c$ with $y_n \to a$.

এই হল দ্বিতীয় sequence. এবার $f(x_n)$ আর $f(y_n)$-এর limit নিয়ে দেখি এক হয় কি না।

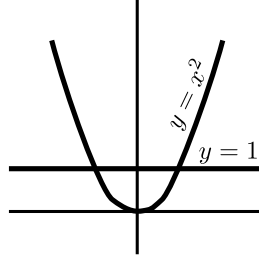



Fig 43

Then $f(x_n) = x_n \to a$,
but $f(y_n) = -y_n \to -a \neq a$ since $a \neq 0$.
Hence, by the sequential criterion of limit, $\lim_{x\to a} f(x)$ does not exist, and so f cannot be continuous at $x = a$.

■

আরেকটা একইরকম অংক। প্রথমে নিজে করার চেষ্টা কর, তারপরে সমাধানটার সঙ্গে মিলিয়ে নিও।

Example 25: Let

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 2-x, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Show that $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ and $\lim_{x\to c} f(x)$ does not exist if $c \neq 1$.[4] **(2012.5c)**

SOLUTION:

We know that $f_1(x) = x$ and $f_2(x) = 2 - x$ are both continuous functions.
Now

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Take any $c \neq 1$.
$\because \mathbb{Q}$ and $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ are both dense in $\mathbb{R}$,

$$\exists \{a_n\}_n \subseteq \mathbb{Q} \quad \exists \{b_n\}_n \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad a_n \to c \text{ and } b_n \to c.$$

Then $f(a_n) = f_1(a_n) \to f_1(c)$, and $f(b_n) = f_2(b_n) \to f_2(c)$.
But $f_1(c) = c \neq 2 - c = f_2(c)$, since $c \neq 1$.
So by the sequential criterion of limit, $\lim_{x\to c} f(x)$ cannot exist.

■

এবার এই কয়টা ধাঁধাটা করো দেখি, কেমন বুঝেছ!

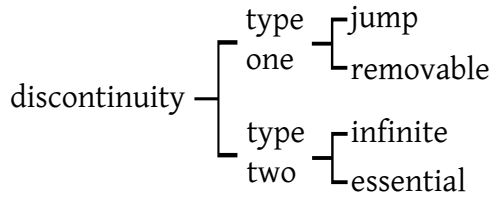
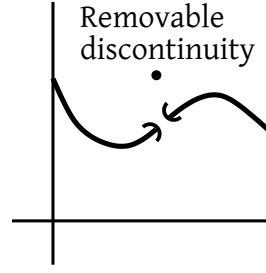



Fig 44 **Fig 45**

Exercise 23: Fig 43-এ $y = x^2$ আর $y = 1$-এর গ্রাফ দেওয়া আছে। সেটা দেখে বলতে পারো নীচের function-টা কোন কোন point-এ continuous?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

■

Exercise 24: এমন একটা $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ দাও যেটা খালি $x = 1$ আর $x = 2$-তে continuous. ■

Exercise 25: আচ্ছা, যদি

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

হয়, তবে $f(x)$ কোথায় কোথায় continuous? ■

Exercise 26: এমন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ দিতে পারো যেটা কেবলমাত্র $x \in \mathbb{Z}$ হলেই continuous হয়? ■

DAY 4
Discontinuous functions

Continuity-র definition-এর negation নিয়ে discontinuity-র definition পেয়েছিলাম। কিন্তু discontinuity তো নানা রকমের হয় (Fig 44). গ্রাফ দেখে আমরা এদের চিনতে শিখেছি, এবার দেখি অংকের ভাষায় কি করে এদের definition লিখতে হয়।

Fig 46

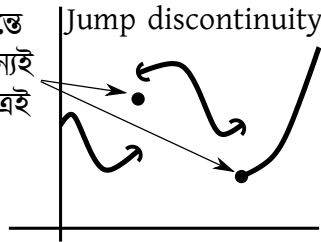
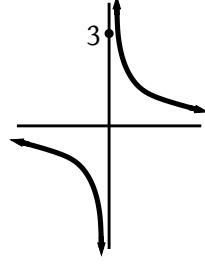
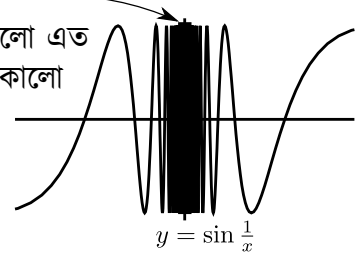



Fig 47 **Fig 48**

সবচেয়ে সহজ হল removable discontinuity, যেখানে রেললাইনের দুটো প্রান্ত মুখোমুখিই আছে, খালি একটা ফিশ্‌প্লেট সরানো। তার মানে $\lim_{x\to a} f(x)$ দিব্যি exist করে, কিন্তু সেটা $f(a)$-র সমান নয় (Fig 45).

> **DEFINITION: Removable discontinuity**
>
> Let $f : D \to \mathbb{R}$ where $D \subseteq \mathbb{R}$ and $a \in D$. Then
>
> "$f(x)$ has a removable discontinuity at $x = a$"
>
> means
>
> $$\lim_{x\to a} f(x) \text{ exists finitely, but } \neq f(a).$$

একইভাবে jump discontinuity-র সংজ্ঞা। এখানে দুটো প্রান্ত খানিকটা সরে গেছে (Fig 46).

> **DEFINITION: Jump discontinuity**
>
> Let $f : D \to \mathbb{R}$ where $D \subseteq \mathbb{R}$ and $a \in D$. Then
>
> "$f(x)$ has a jump discontinuity at $x = a$"
>
> means
>
> " $\lim_{x\to a-} f(x)$ and $\lim_{x\to a+} f(x)$ both exists finitely, but are unequal."

আচ্ছা, দুটো definition-এই "exists finitely" লিখেছি কেন? কারণ একটা limit যে সব সময়ে একটা finite সংখ্যা হবেই এমন কোনো কথা নেই। সেটা ∞ বা $-\infty$ হতে পারে (যেমন infinite discontinuity-র বেলায়) বা আদৌ exist নাও করতে পারে (যেমন essential discontinuity-র বেলায়)।
এবার আমরা infinite discontinuity-র সংজ্ঞা লিখতে পারি (Fig 47)–

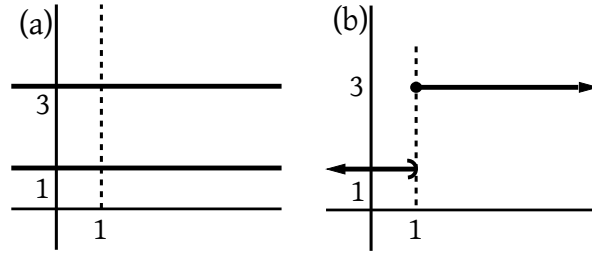



Fig 49

DEFINITION: **Infinite discontinuity**

Let $f : D \to \mathbb{R}$ where $D \subseteq \mathbb{R}$ and $a \in D$. Then

"$f(x)$ has an infinite discontinuity at $x = a$"

means

both $\lim_{x\to a-} f(x)$ and $\lim_{x\to a+} f(x)$ exist (finite/infinite), and at least one of them is infinite.

পড়ে থাকে খালি একটাই কেস (Fig 48)–

DEFINITION: **Essential discontinuity**

Let $f : D \to \mathbb{R}$ and $a \in D$. Then

"$f(x)$ has an essential discontinuity at $x = a$"

means

At least one of $\lim_{x\to a-} f(x)$ and $\lim_{x\to a+} f(x)$ does not exist (finite/infinite).

এখানে একটা কথা বলে রাখি--যখন লিখছি যে, "$\lim_{x\to a-} f(x)$ does not exist" তখনও কিন্তু ধরে নিচ্ছি যে $x \to a-$

Fig 50

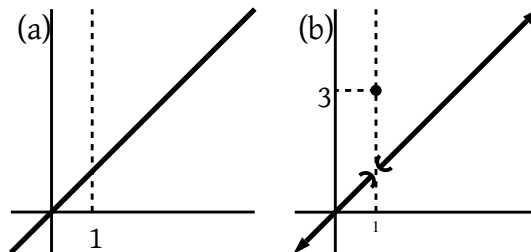
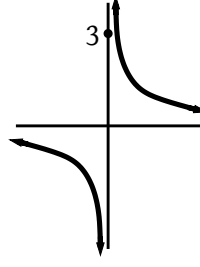



Fig 51

হওয়া সম্ভব, অর্থাৎ D-এর মধ্য দিয়ে বাঁদিক থেকে a-র যত খুশী কাছে যাওয়া সম্ভব। একইভাবে "$\lim_{x\to a+} f(x)$ does not exist" বলার সময়ে ধরে নিচ্ছি যে $x \to a+$ সম্ভব।

Example 26: In each of the following cases give an example of a function defined on an interval I :

1. f has a jump discontinuity at some point in I
2. f has a removable discontinuity at some point in I.
3. f has an infinite discontinuity at some point in I.

[1+1+1] **(2001)**

SOLUTION:

> In all the cases we shall take $I = (-\infty, \infty)$.

Jump discontinuity-ওয়ালা function বানানোর সোজা কায়দা হল, যে কোনো দুটো continuous function নিয়ে শুরু করা। তারপর এমন একটা x নাও যেখানে function দুটোর value আলাদা হয়। যেমন Fig 49(a)-তে আমরা $g(x) \equiv 1$ আর $h(x) \equiv 3$ এই দুটো function নিয়েছি। $x = 1$-এ এদের value আলাদা।
এবার $x = 1$-এর একদিকে আমরা প্রথম function-টা নেব, আর অন্যদিকে নেব দ্বিতীয়টা (Fig 49(b))।

> For the first part take
>
> $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < 1 \\ 3 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

Removable discontinuity-ওয়ালা function বানানো আরও সহজ। যে কোনো একটা continuous function নিয়ে আরম্ভ কর। তারপর গ্রাফের যেকোনো একটা point-কে খানিকটা সরিয়ে দাও। এখানে আমরা Fig 50(a)-তে $g(x) = x$ নিয়ে শুরু করেছি। তারপর $x = 1$-এর ওপরের বিন্দুটাকে সরিয়ে 3-এ নিয়ে গিয়ে Fig 50(b) পেয়েছি।

> For the second part take
>
> $$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \neq 1 \\ 3 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

Infinite discontinuity-ওয়ালা function বানাতে হলে কোথাও একটা 0 দিয়ে ভাগ গোছের ব্যাপার রাখলে সুবিধা হবে। তাই আমরা $\frac{1}{x}$ নিয়ে কাজ শুরু করেছি। কিন্তু এটা আবার $x = 0$-তে undefined. এদিকে আমাদের function-টাকে পুরো $I = (-\infty, \infty)$-র উপরেই defined হতে হবে। তাই $f(0)$-টাকে যা খুশী একটা কিছু নিয়েছি, ধরো $f(0) = 3$. Fig 51 দ্যাখো।

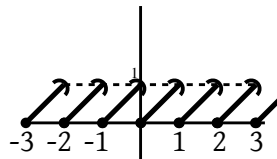



Fig 52

> For the third part take
>
> $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 3 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

■

Example 27: State true or false with justification if $f(x) = \frac{1}{x}$ has a removable discontinuity at $x = 0$.[2] **(2010.8a)**
SOLUTION: এই অংকটার খুব একটা মানে হয় না, কারণ $f(x) = 1/x$-এর domain-এর $x = 0$ নেই, সুতরাং continuity বা discontinuity-র প্রশ্নই ওঠে না। তবে যদি আমরা $f(x)$ নিতাম এইরকম--

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

তবে $x = 0$-তে $f(x)$-এর infinite discontinuity থাকত, removable discontinuity নয়। ■

Example 28: Let $[x]$ denote the largest integer not exceeding x and $f(x) = x - [x]$ Determine the discontinuities of f and show that they are all of the first kind.[2+1]. **(1997)**
SOLUTION: এখানে $x - [x]$ মানে হল x-এর ভগ্নাংশটুকু। x যখন একটা integer তখন তাতে কোনো ভগ্নাংশ নেই। সুতরাং $f(x) = 0$. এবার x যত বাড়বে, তার ভগ্নাংশটাও ততই বাড়বে। কিন্তু বাড়তে বাড়তে যেই x পরের integer-টায় পৌঁছে যাবে, অমনি ভগ্নাংশটা $0.9, 0.99, 0.999$ এইভাবে বাড়তে বাড়তে হঠাৎ ঝপ্ করে 0-তে নেমে যাবে। তারপর আবার একটু একটু করে বাড়বে, আবার ঝপ্ করে নেমে যাবে, এই ভাবে চিরটা কাল চলবে।
প্রথমে একটা গ্রাফ এঁকে নিই (Fig 52). গ্রাফ দেখে আমাদের দাবী--

> The function is discontinuous only at all the integers.

প্রমাণটার দুটো ভাগ, প্রথমে দেখাতে হবে যে integer-গুলোতে $f(x)$ discontinuous, এবং তারপরে দেখাতে হবে যে অন্য কোনো point-এ discontinuous নয়।

> Step 1: $\forall n \in \mathbb{Z}$ $f(x)$ is discontinuous at $x = n$:

Left limit আর right limit বার করি--

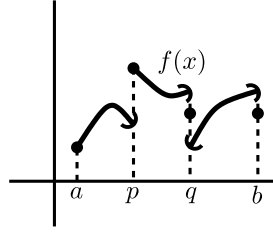



Fig 53

> For $x \in [n-1, n)$ we have $f(x) = x - (n-1)$, which is continuous.
> So $\lim_{x \to n-} f(x) = n - (n-1) = 1$.

> Again, for $x \in [n, n+1)$ we have $f(x) = x - n$, which is also continuous, and so $f(n) = \lim_{x \to n+} f(x) = n - n = 0 \neq 1$.

তার মানে left limit আর right limit দুটোই exist করে, কিন্তু অসমান, অর্থাৎ jump discontinuity, যেটা একটা type 1 discontinuity-ও বটে।

> So $f(x)$ has a type I discontinuity at $x = n$ which is also a jump discontinuity.

এবার দেখাব অন্য কোথাও discontinuity নেই।

> Step 2: $\forall a \notin \mathbb{Z}$ $f(x)$ is continuous at $x = a$:
>
> Let $n = [a]$. Then $a \in (n, n+1)$. Now, over $(n, n+1)$ we have $f(x) = x - n$, which is continuous. So $f(x)$ is continuous at $x = a$.

■

Exercise 27: Find the point(s) of discontinuity of $f(x)$ defined by $f(x) = x - [x]$ for $0 < x < 2$, where $[x]$ denote the greatest integer not greater than x. Also state the nature of the discontinuity.[1+1] **(2007)**

Hint:

আগের অংকটাই, খালি এবার x থাকবে 0 থেকে 2-এর মধ্যে। সুতরাং খালি $x = 1$-এ একটা discontinuity থাকবে। আর সেটা হবে একটা type 1 discontinuity এবং jump discontinuity. ■

Exercise 28: Find the points of discontinuity of $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ defined as $f(x) = [x]^{[x]}$. What is the nature of these discontinuities? ■

4.1 Piecewise continuous

ধরো একটা function আছে $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. যদি এটা কেবল finite সংখ্যক point-এ discontinuous হয়, এবং যদি সবগুলো discontinuity-ই হয় type 1 (মানে removable বা jump) তবে আমরা f-কে বলব piecewise continuous.

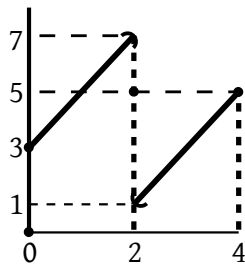



Fig 54

অর্থাৎ কয়েকটা continuous টুকরো জুড়ে তৈরী। Fig 53 দেখলেই এই নামকরণের সার্থকতা বুঝবে। এখানে p, q আর b-তে jump discontinuity আছে। যে সব interval-এর উপরে function-টা continuous, তাদের বলে interval of continuity. যেমন এখানে $[a, p), [p, q), (q, b)$ হল তিনটে interval of continuity.

Example 29: When is a real valued function f of x defined on $[a, b]$ said to be piecewise continuous? Is the function f defined below piecewise continuous? If so find the intervals of continuity of f.

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 2x & \text{if } 0 \leq x < 2 \\ 5 & \text{if } x = 2 \\ 2x - 3 & \text{if } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

(2008)

SOLUTION:

DEFINITION: **Piecewise continuous function**

A function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is called piecewise continuous on $[a, b]$ if

1. it is continuous at all but a finite number of points in $[a, b]$,
2. $\forall x \in (a, b] \quad f(x-) \in \mathbb{R}$.
3. $\forall y \in [a, b) \quad f(y+) \in \mathbb{R}$.

লক্ষ কর যে $f(x-), f(y+) \in \mathbb{R}$ হওয়া মানে এরা সব সময়ে finite, তাই discontinuity-গুলো সব type 1 হতে বাধ্য।

এবার দ্বিতীয় অংশ। Fig 54 দ্যাখো। $ax + b$ টাইপের function-রা continuous হয়, সুতরাং $0 \leq x < 2$ বা $2 < x \leq 4$ হলে continuity নিয়ে কোনো সমস্যা নেই। ঝঞ্ঝাট বাঁধার একমাত্র সম্ভাব্য জায়গা হল $x = 2$. তাই আমরা $f(2), f(2-)$ আর $f(2+)$ বার করে দেখব।

We know that any linear function $ax + b$ is continuous.

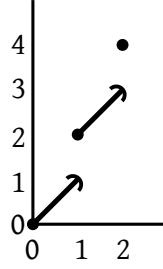



Fig 55

Now

$$\begin{aligned} f(2) &= 5 \\ f(2-) &= \lim_{x\to 2-} 3+2x = 3+2\times 2 = 7, \\ f(2+) &= \lim_{x\to 2-} 2x-3 = 2\times 2-3 = 1. \end{aligned}$$

কি করে $f(2-)$ আর $f(2+)$ বার করলাম বুঝলে? 2-এর বাঁদিকে $f(x)$-এর ফর্মুলাটা হল $3+2x$, সেটাতে $x \to 2-$ করে পেলাম $f(2-) = 7$. একইভাবে ডানদিকের ফর্মুলাটা ছিল $2x-3$. সেটাতে $x \to 2+$ বসিয়ে পেলাম $f(2+) = 1$.

$\because f(2-) \neq f(2)$, $\therefore f$ is not continuous at $x = 2$.
But f is continuous at all other points.
Also $\forall x \in (0, 4]$ $f(x-)$ exists, and $\forall x \in [0, 4)$ $f(x+)$ exists.
Hence f is piecewise continuous.

Interval of continuity মানে কোন কোন interval-এর উপরে $f(x)$ continuous.

Its intervals of continuity are $[0, 2)$ and $(2, 4]$.

■

Exercise 29: Is the function f defined below piecewise continuous? If so find the intervals of continuity of f.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{if } 1 \leq x < 2 \\ 2-x & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

■

Example 30: Show that the function $f(x) = x + [x]$ is piecewise continuous in $[0, 2]$, where $[x]$ represents the greatest integer not exceeding x.[2] **(2009)**

SOLUTION:

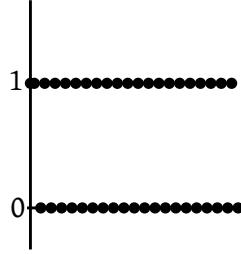



Fig 56

> Here
> $$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in [0,1) \\ x+1 & \text{if } x \in [1,2) \\ 4 & \text{if } x = 2 \end{cases}$$
> Since functions of the form $ax+b$ are continuous, so this function is continuous at all points except $x = 1, 2$.

(Fig 55) দ্যাখো। এবার one-sided limit-গুলো পরীক্ষা করে দেখি--

> Also, $f(1-) = \lim_{x\to 1-} x = 1 \in \mathbb{R}$
> and $f(1+) = \lim_{x\to 1+} x+1 = 2 \in \mathbb{R}$.
> Similarly, $f(2-) = \lim_{x\to 2-} x+1 = 3 \in \mathbb{R}$ So the function is piecewise continuous.

■

4.2 Essential discontinuity

এবার আমরা কিছু উদাহরণ দেখব essential discontinuity-র। মনে আছে নিশ্চয়ই যে essential discontinuity মানে অন্ততঃ কোনো এক পাশের limit-টা exist করে না। এখানে sequential criterion of limit-এর বেশ কিছু প্রয়োগ দেখবে।

Example 31: If a function $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ is defined by

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

then find the points of discontinuity of f. Determine the nature of the discontinuities.[3] **(2000,2006)**

SOLUTION:

আমরা আগেই বলেছি যে এই function-টার গ্রাফ একবার 0-তে নামছে, পরমুহূর্তেই 1-এ উঠছে, ফের নামছে, ফের উঠছে, এই রকম। ফলে এর প্রতিটি point-এই essential discontinuity (Fig 56). কোথাও কোনো limit (left বা right) নেই। এইটাই আমরা এবার অংক কষে দেখাব। প্রথমে দেখাব right hand limit নেই।

Step 1: Shall show that

$\forall a \in [0,1) \quad f(a+)$ does not exist.

Take any $a \in [0,1)$.

আমরা sequential criterion of right hand limit লাগাব। তার জন্য দুটো sequence দরকার $\{x_n\}_n$ আর $\{y_n\}_n$, যাতে $x_n \to a$ আর $y_n \to a$ হয় কিন্তু $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ আর $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ অসমান হয়।

$\because \mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$,
$\therefore \mathbb{Q} \cap (a,1]$ is dense in $(a,1]$.
So $\exists \{x_n\}_n \subseteq \mathbb{Q} \cap (a,1]$ with $x_n \to a$.

এই হল আমাদের প্রথম sequence.

Similarly,
$\because \mathbb{Q}^c$ is dense in $\mathbb{R}$,
$\therefore \mathbb{Q}^c \cap (a,1]$ is dense in $(a,1]$.
So $\exists \{y_n\}_n \subseteq \mathbb{Q}^c \cap (a,1]$ with $y_n \to a$.

এই হল দ্বিতীয় sequence.

Now $f(x_n) = 1 \to 1$,
but $f(y_n) = 0 \to 0 \neq 1$.
Hence, by the sequential criterion of right hand limit, $f(a+)$ does not exist, as required.

একই ভাবে প্রমাণ করা যাবে যে left hand limit-ও কোথাও exist করে না। প্রমাণটা এতই একইরকম যে "similarly" লিখে ছেড়ে দেওয়া যায়।

Step 2: Similarly can show that $\forall a \in (0,1]$, $f(a-)$ does not exist.

এইবার খালি লিখে দেওয়া যে সব point-এই essential discontinuity থাকতে বাধ্য, যেহেতু left hand আর right hand limit কেউই কোথাও exist করে না।

Step 3: Since either the left hand or the right hand limit does not exist at each $a \in [0,1]$ so each $a \in [0,1]$, is a point of discontinuity and the discontinuities are all essential (type II).

■

Exercise 30: Let

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

State with reasons whichever of the following statements is true:

1. f is continuous at rational points and discontinuous at irrational points.
2. f is continuous at irrational points and discontinuous at rational points.
3. f is continuous everywhere.
4. f is discontinuous everywhere.

[3] **(1997)**
HINT:
উত্তর হবে "f is discontinuous everywhere." কারণটা তো আগের অংকেই লিখেছি। ■

Exercise 31: If $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ is the function defined by

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x \text{ is rational}\\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational}\end{cases}$$

then show that f is totally discontinuous on $[0,1]$.[2] **(2010.5b)**
HINT:
"Totally discontinuous" কোনো standard term নয়। এখানে বোঝানো হচ্ছে যে function-টা $[0,1]$-এর সর্বত্রই discontinuous. ■

Answers

1. $\delta=\sqrt{1.5}-1$, বা তার চেয়ে কম যেকোনো >0 সংখ্যা নিলেই চলবে। **2.** হ্যাঁ। **3.** অসম্ভব। **4.** না। **5.** $\mathbb{Q}^c$ হল $\mathbb{R}$-এর মধ্যে dense. এবার (**??**) নম্বর অংকের মত এগোও। **6.** হ্যাঁ, $f(0)=\lim f(\frac{1}{n})=\lim g(\frac{1}{n})=g(0)$. **7.** যদি $b\in A'$ হয় তবে $\{a_n\}_n\subseteq A$ পাবে যাতে $a_n\to b$ হয়। সুতরাং $f(b)=\lim_n f(a_n)=\lim_n g(a_n)=g(b)$. **8.** এখানে $f(1-)\neq f(1)$. সুতরাং এমন কোনো sequence নিলেই চলবে, যেটা বাঁদিক থেকে $1-e$ যায়, যেমন $\{1-\frac{1}{n}\}_n$.
9. $f(2)=\pi^2$, $f(n)=\pi^n$, $f(-1)=\pi^{-1}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\pi^{1/2}$. যদি $x\in\mathbb{Q}$ হয় তবে $f(x)=\pi^x$ হবে। $f(\sqrt{2})=\pi^{\sqrt{2}}$. আসলে $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\pi^x$. **10.** $\forall\delta>0\quad(a-\delta,a)\cap D\neq\phi$ বা $\forall\delta>0\quad\exists x\in D\quad x\in(a-\delta,a)$. **11.** $\forall\epsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in(a,a+\delta)\cap D\quad f(x)\in N(L,\epsilon)$.
12. "$\lim_{x\to a+}f(x)=\infty$" মানে $\forall M\in\mathbb{R}\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in(a,a+\delta)\cap D\quad f(x)>M$. একইভাবে "$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$" মানে $\forall M\in\mathbb{R}\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in N'(a,\delta)\cap D\quad f(x)>M$.
13. "$\lim_{x\to a+}f(x)=-\infty$" মানে $\forall M\in\mathbb{R}\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in(a,a+\delta)\cap D\quad f(x)<M$. একইভাবে "$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$" মানে $\forall M\in\mathbb{R}\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in N'(a,\delta)\cap D\quad f(x)<M$. **14.** $L=4$, না, $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=3$ হত। **15.** $\because\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\ \therefore\forall M>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in N'(a,\delta)\quad f(x)>M$. এবার যাই $\{x_n\}_n\subseteq I$ নাও, $x_n\to a$ হলে একটা পর্যায়ের পর $x_n\in N'(a,\delta)$ হবেই। সুতরাং তারপর থেকে $f(x_n)>M$ হবে। **16.** $\because f(c+)=L,\ \therefore\forall\epsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in(c,c+\delta)\quad f(x)\in N(L,\epsilon)$. এদিকে $\{x_n\}_n\subseteq(c,b]$-এর পক্ষে $x_n\to c$ হতে হলে একটা পর্যায়ের পর $(c,c+\delta)$-র মধ্যে ঢোকা ছাড়া পথ নেই।
18. $\lim f(a_n)=1,\lim f(b_n)=0$. **21.** দেখাও যে limit-টা হবে $\inf\{f(x):x\in(a,b)\}$. **23.** ±1.
24. $f(x)=\begin{cases}(x-1)(x-2) & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{if } x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$. **25.** $n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$.
26. $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x) & \text{if } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{if } x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$ **28.** $2,3,4$. সবাই jump discontinuity. **29.** হ্যাঁ, $[0,2),[2,3]$. সাবধান, 1-এ কিন্তু কোনো discontinuity নেই!

Chapter VIII
Sequences (part 2)

DAY 1
Subsequences

একটা set-এর কিছু element নিয়ে যদি একটা set বানাই তবে সেই নতুন set-টাকে বলে মূল set-টার একটা subset. তেমনি যদি একটা sequence-এর কিছু term নিয়ে আরেকটা sequence বানাই তবে সেটা হবে একটা **subsequence.** তবে subset-এর বেলায় যে কোনো কয়েকটা element নিলেই চলত, কিন্তু subsequence-এর বেলায় কয়েকটা নিয়ম আছে। প্রথম কথা নতুন জিনিসটা একটা sequence হতে হবে, এবং যেহেতু আমরা এখানে infinite sequence নিয়ে আলোচনা করছি, তাই আমাদের একটা-দুটো term তুললেই হবে না, infinitely many term তুলতে হবে। আমরা জানি যে কোনো sequence-এর term-গুলোর মধ্যে কে আগে কে পরে সেটা গুরুত্বপূর্ণ। তাই subsequence-এর জন্য term তোলার সময়েও সে বিষয়ে একটা নিয়ম আছে--

> কোনো term একবার তোলা হয়ে গেলে আর নতুন করে সেটা বা তার আগের কোনো term নেওয়া যাবে না।

যেমন $a_1, a_2, a_3, \ldots$ যদি একটা sequence হয় তবে--

- $a_1, a_3, a_3, a_5, \ldots$ একটা subsequence নয়, কারণ a_3 একাধিকবার এসেছে,
- $a_1, a_3, a_2, a_5, \ldots$-ও subsequence নয়, কারণ a_3-র পরে a_2 এসেছে,
- কিন্তু $a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots$ একটা subsequence.

Example 1: Define a subsequence of a sequence of real numbers.[1] **(2005)**

SOLUTION:

> DEFINITION: **Subsequence**
>
> $\{x_{n_k}\}_k$ is called a <u>subsequence</u> of $\{x_n\}_n$ if $n_k \in \mathbb{N}$ are such that
>
> $$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots .$$

■

লক্ষ কর যে, $\{a_{n_k}\}_k$ একটা subsequence হলে $n_k \to \infty$ হতে বাধ্য!
অনেক সময়েই আমরা যেসব term নিয়ে একটা subsequence বানাই, তাদের মধ্যে একটা প্যাটার্ণ থাকে, যেমন হয়তো খালি জোড়-সংখ্যক term-গুলো নিই ($a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots$ এইরকম)। কিংবা হয়তো সব square সংখ্যক term-গুলো, যেমন $a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots$. এরকম ক্ষেত্রে আমরা এই প্যাটার্ণটাকে subsequence-এর ফর্মুলাতে লিখে দিই, যেমন $\{a_{2n}\}_n$ হল সব জোড়-সংখ্যক term দিয়ে তৈরী subsequence. একইভাবে $a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots$-কে লিখব $\{a_{n^2}\}_n$.

Exercise 1: যদি $a_n = \frac{n}{n+1}$ হয় তবে নীচের subsequence-গুলোর প্রথম তিনটে term লেখো।
(1) $\{a_{2n+1}\}_n$ **(2)** $\{a_{3n}\}_n$ **(3)** $\{a_{n^3}\}_n$
■

Exercise 2: ধরো $\{a_n\}_n$ একটা sequence নিলাম। তবে $\{a_{2n}\}_n$ আর $\{a_{3n}\}_n$ এই subsequence-দুটোর মধ্যে অনেক term-ই আছে common. এই সব common term-গুলোকে নিয়ে আবার একটা নতুন subsequence হয়। সেইটা কি? ■

মনে রেখো যে subsequence মাত্রেই একটা sequence. সুতরাং sequence-দের বিষয়ে যা যা জানি সবই subsequence-দের বেলাতে প্রযোজ্য, যেমন increasing/decreasing, convergent, bounded ইত্যাদি। বাবা-মার কিছু বৈশিষ্ট্য যেমন সন্তানের মধ্যে বর্তায়, আবার কিছু বৈশিষ্ট্য বর্তায় না, তেমনি একটা sequence-এর কিছু বৈশিষ্ট্য তার সব subsequence-এর মধ্যেই সংক্রামিত হয়, আবার কিছু কিছু বৈশিষ্ট্য হয় না। ঠিক কোন কোন বৈশিষ্ট্য এরকম উত্তরাধিকারসূত্রে পাওয়া যায়, সেটা জেনে রাখা ভালো। মোটামুটি এই বলে শুরু করি যে, সাধারণতঃ কোনো sequence "শান্তশিষ্ট" হলে তার subsequence-গুলোও "শান্তশিষ্ট" হয়ে থাকে। যেমন ধর কোনো sequence যদি bounded হয় (মানে অসীমের দিকে হাত না বাড়িয়ে, দুটো বেড়ার মধ্যে শান্ত হয়ে আবদ্ধ থাকে) তবে তার subsequence-গুলো bounded হতে বাধ্য। আবার যদি একটা sequence কোনো সংখ্যা L-এ converge করে (মানে গুটিগুটি চরণে L-এর দিকে এগোয়), তবে তার যাবতীয় subsequence-ও ওই একই L-এ converge করতে বাধ্য। কিন্তু সুখের কথা এই যে দুর্বিনীত sequence-দের subsequence-রা কিন্তু সবাই দুর্বিনীত হয় না, তাদের অনেকেই বেশ শান্তশিষ্ট হয়, যেমন অনেক unbounded sequence-এর দিব্যি bounded subsequence থাকে। এমন কি সবচেয়ে বিচ্ছিরি যে sequence-এর কথা আমরা জেনেছি, সেই oscillating sequence-দেরও এমন subsequence সম্ভব, যারা converge করে! আসলে সেই কারণেই subsequence-দের নিয়ে আমাদের আগ্রহ, অনেক সময়ে যখন কোনো sequence খুব ঝামেলাজনক হয়, তখন আমরা সরাসরি সেটাকে নিয়ে কাজ না করে তার ভদ্রসভ্য subsequence-গুলোকে নিয়ে কাজ করি।
এতক্ষণ যা যা বললাম এবার সেগুলো একে একে প্রমাণ করার সময় এসেছে। প্রথমে দেখাব যে, কোনো sequence যদি কোনো সংখ্যা L-এ converge করে, তবে তার যাবতীয় subsequence-ও ওই একই L-এ converge করবে।

Example 2: Show that every subsequence of a convergent sequence is convergent.[2] **(2005)**

SOLUTION: প্রথমে যে কোনো একটা convergent sequence আর তার যে কোনো একটা subsequence নিই--

> Let $x_n \to L$. Let $\{x_{n_k}\}_k$ be any subsequence of $\{x_n\}_n$.
> Shall show: $x_{n_k} \to L$ as $k \to \infty$,
> *i.e.*,
> $\forall \epsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad |x_{n_k} - L| < \epsilon.$

প্রথমে $\forall \epsilon$ আছে, তাই--

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার $\exists K$ আছে, তাই যুৎসই একটা K পেতে হবে--

Since $x_n \to L$, so
$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |x_n - L| < \epsilon.$$
But since $\{x_{n_k}\}_k$ is a subsequence, so $n_k \to \infty$.
Hence
$$\exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad n_k > N.$$
 Choose this K.

 Take any $k \geq K$.

 Then $|x_{n_k} - L| < \epsilon$, as required.

Convergent sequence-এর subsequence-রাও convergent হয়। শান্তশিষ্ট বাপ-মায়ের সন্তানরাও শান্তশিষ্ট হয়। কিন্তু দুর্বিনীত বাপ-মায়ের সন্তানও অনেকসময়ে শান্তশিষ্ট হয়ে থাকে। এবার সেরকম একটা উদাহরণ দেখি।

Example 3: Show that the sequence $\{x_n\}_n$ defined by
$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin \frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 2, ...)$$
has a convergent subsequence, but the sequence is not convergent.[3] **(2011.4b)**

SOLUTION: ভালো করে x_n-এর চেহারাটা দেখে নাও। যতটা বদ্খৎ দেখাচ্ছে ততটা কিন্তু নয়। $(1 - \frac{1}{n})$ অংশটা তো বেশ ভদ্রই, সোজা 1-এর দিকে যাচ্ছে। আর $\sin(\frac{n\pi}{2})$ অংশটা কিন্তু খালি $0, 1$ আর -1 ছাড়া কিছুই হতে পারে না। কয়েকটা উদাহরণ দেখলেই বুঝবে--

n	1	2	3	4	5	6	7
$\sin(\frac{n\pi}{2})$	1	0	-1	0	1	0	-1

লক্ষ কর even term-গুলো সবাই শূন্য, সুতরাং ওরা 0-তেই converge করবে। ব্যস্ অংকের প্রথম অংশ হয়ে গেল।

For $n \in \mathbb{N}$,
$$x_{2n} = \left(1 - \tfrac{1}{2n}\right) \sin \tfrac{2n\pi}{2} = 0.$$
Thus $\{x_{2n}\}_n$ is a convergent subsequence.

দ্বিতীয় অংশে দেখাতে হবে যে মূল sequence-টা convergeকরে না। আমরা সেটা একটু কায়দা করে দেখাব। দেখাব যে, এমন আরেকটা subsequence আছে যেটা 0 ছাড়া অন্য কিছুতে convergeকরে। তাহলেই প্রমাণ হবে যে, মূল sequence-টা converge করতে পারে না, কারণ যদি করত তবে সব subsequence-ই ওই একই limit-এই যেত, দুটো দু'রকম জায়গায় যেতে পারত না।

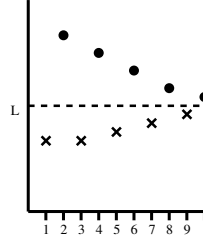



Fig 1

উপরের তালিকা থেকেই দেখা যাচ্ছে যে $\sin(\frac{n\pi}{2})$-এর প্যাটার্ণটা এই রকম--

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, ...$$

এখানে $4n-3$ নম্বর term-গুলো (যেমন, $1, 5, 9$ নম্বর ইত্যাদি term-গুলো) হল 1.
অতএব--

Also

$$x_{4n+1} = \left(1 - \frac{1}{4n+1}\right) \sin \frac{(4n+1)\pi}{2} = \left(1 - \frac{1}{4n+1}\right) \to 1.$$

So $\{x_{4n+1}\}_n$ is another subsequence that converges to a different limit.

Hence the original sequence cannot be convergent.

■

Exercise 3: Prove or disprove: the sequence $\{x_n\}_n$ where

$$x_n = \frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right],$$

is convergent.[2] **(2013.4a)**
HINT: এটাও আগের অংকটার মতই। প্রথম কয়েকটা x_n বার করে দ্যাখো--

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = 0, ...$$

এইভাবে $\frac{1}{2}$ আর 0 পরপর চলতে থাকবে। সুতরাং বুঝতেই পারছ যে convergent নয়। আগের অংকটার অনুসরণে গুছিয়ে লেখার ভার তোমাকেই দিলাম। ■

একটা sequence যদি converge করে তবে জোর দিয়ে বলতে পারি যে, তার সব subsequence-ও converge করতে বাধ্য। কিন্তু কোনো sequence-এর একটা subsequence যদি converge করে তা থেকেই বলতে পারি না যে, মূল sequence-টাও converge করবেই। কিন্তু একাধিক subsequence যদি একই limit-এ যায়, তবে অনেক সময়ে বলা যায় যে, মূল sequence-টাও converge করতে বাধ্য। এবার সেরকম কয়েকটা উদাহরণ দেখি।
Fig 1-এ একটা sequence $\{a_n\}_n$-এর গ্রাফ দেখানো হয়েছে। এখানে even term-গুলোকে ডট্ দিয়ে, আর odd term-গুলোকে ক্রস দিয়ে এঁকেছি। লক্ষ কর ডট্গুলো সবাই L-এ converge করছে, আবার ক্রসগুলোও গিয়ে ওই একই L-এ converge করছে। যেহেতু sequence-টার সব বিন্দুই হয় ডট্ নয় ক্রস, তাই এর ফলে পুরো sequence-টাই L-এ converge করছে। তার মানে যদি

$$a_{2n} \to L \text{ এবং } a_{2n-1} \to L$$

হয় তবে $a_n \to L$ হতে বাধ্য। এই কথাটা আমাদের শীঘ্রই কাজে লাগবে। নীচের অংকে প্রমাণটা চেয়েছে।

Example 4: If for a sequence $\{x_n\}_n$ of real numbers, $\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} x_{2n}$, then prove that $\{x_n\}_n$ is convergent.[3] **(2012.3d)**

SOLUTION:

Let $\ell = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} x_{2n}$. Shall show $x_n \to \ell$, *i.e.*,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n \in N(\ell, \epsilon)$.

Take any $\epsilon > 0$.

$\because x_{2n} \to \ell$,

$\therefore \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad x_{2n} \in N(\ell, \epsilon)$.

Similarly, $\because x_{2n-1} \to \ell$,

$\therefore \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad x_{2n-1} \in N(\ell, \epsilon)$.

Choose $N = \max\{2N_1, 2N_2 - 1\} \in \mathbb{N}$.

Take any $n \geq N$.

Then n is either even or odd.

If $n = 2k$, we have $k \geq N_1$. So $x_n = x_{2k} \in N(\ell, \epsilon)$, as required.

Similarly, if $n = 2k - 1$, we have $k \geq N_2$. So $x_n = x_{2k-1} \in N(\ell, \epsilon)$, as required.

■

Exercise 4: একটা sequence আছে $\{a_n\}_n$. তোমাকে বলা আছে যে $a_{2n} \to L$ আর $a_{3n} \to K$, যেখানে $L, K \in \mathbb{R}$. দেখাও যে, $L = K$. ■

Example 5: A sequence $\{x_n\}_n$ is defined as follows:

$$x_2 \leq x_4 \leq x_6 \leq \cdots \leq x_5 \leq x_3 \leq x_1$$

and $\{y_n\}_n$ is defined by

$$y_n = x_{2n-1} - x_{2n}.$$

If $y_n \to 0$ as $n \to \infty$, show that the sequence $\{x_n\}_n$ is convergent.[3] **(2005)**

SOLUTION: এই অংকটা করব এইভাবে--প্রথমে দেখাব যে even term-গুলো (মানে x_{2n}-গুলো) converge করবে, এবং odd term-গুলোও (মানে x_{2n-1}-গুলো) converge করবে। তারপর দেখাব যে এই দুটো subsequence-এর limit-ই এক। তা থেকে সিদ্ধান্ত করব যে মূল sequence-টাও নিশ্চয়ই converge করে।

The subsequence $\{x_{2k}\}_k$ is a nondecreasing sequence bounded from above (by x_1).

So $x_{2k} \to L_1$ for some $L_1 \in \mathbb{R}$.

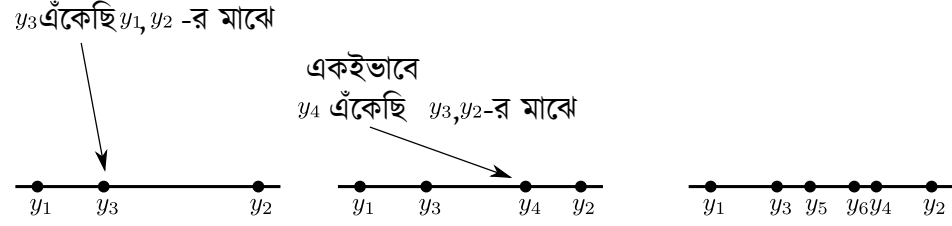



Fig 2

কেন? কারণ, nondecreasing sequence-রা যদি bounded above হবে তবে converge করে (ষষ্ঠ অধ্যায়ে সেটা প্রমাণ করেছিলাম।) একই রকম যুক্তি প্রযোজ্য $\{x_{2k-1}\}_k$-র ক্ষেত্রেও।

> Also the subsequence $\{x_{2k-1}\}_k$ is a nonincreasing sequence bounded from below (by x_2).
> So $x_{2k-1} \to L_2$ for some $L_2 \in \mathbb{R}$.

এবার দেখাব যে $L_1 = L_2$ হতে বাধ্য।

> So
> $$y_n = x_{2n-1} - x_{2n} \to L_2 - L_1.$$
> But given that $y_n \to 0$, $\therefore L_1 - L_2 = 0$, or $L_1 = L_2 = L$, say.

ব্যস্, জোড়-বিজোড় সবাই যদি একই limit-এ গেল তবে আর বাকী রইল কি?

> Since every natural number is either of the form $2n$ or $2n-1$ the sequence $\{x_n\}_n$ converges to L.

■

Example 6: If $y_1 < y_2$ are arbitrary real numbers and $y_n = \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2}$ for every positive integer $n(> 2)$, then show that the sequence $\{y_n\}_n$ is convergent.[4] **(2006)**

SOLUTION: অংকটা দেখে চট্ করে বোঝা মুস্কিল যে কোন দিক দিয়ে চেপে ধরব! এরকম সময়ে কয়েকটা উদাহরণ কষে নিলে চিন্তার সুবিধা হয়। ধর, $y_1 = 0, y_2 = 1$ নিলাম। তাহলে কয়েকটা y_n বার করে দেখি কিছু চোখে পড়ে কি না। ফর্মুলা ধরে কষতে গেলে অনেক সময় লাগবে, তার চেয়ে বরং ছবি এঁকে করি-- লক্ষ কর y_3 পড়বে y_1 আর y_2-র মাঝে। একইভাবে y_4 পড়বে y_3, y_2-র মাঝে। এইভাবে আমরা Fig 2 আঁকতে পারি।
একটা প্যাটার্ণ দেখতে পাচ্ছ? Even term-গুলো ক্রমশঃ কমছে, আর odd term-গুলো বাড়ছে। যদি দেখাতে পারি এই দুটো subsequence-ই একই limit-এ converge করে, তবেই কেল্লা ফতে! প্ল্যান ছকে ফেলেছি, এবার কাজে নেমে পড়ি।

> We have
> $$y_n = \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2},$$

or

$$y_n - y_{n-1} = -\frac{2}{3}(y_{n-1} - y_{n-2}),$$

আমরা এইভাবে লিখলাম কেন? কারণ Fig 2 থেকে দ্যাখো y_n-গুলো একবার উঠছে, একবার নামছে। y_1-এর চেয়ে y_2 বড়, কিন্তু y_2,-র চেয়ে y_3 ছোটো, তার চেয়ে আবার y_4 বড়, এইরকম। তার মানে $y_n - y_{n-1}$-এর চিহ্নটা প্রতি ধাপে উল্টে উল্টে যাচ্ছে। এইটা দেখানোর জন্যই আমরা recurrent relation-টাকে এইভাবে লিখেছি।

or taking $z_n = y_n - y_{n-1}$,

$$z_n = -\frac{2}{3}z_{n-1}.$$

Now $z_2 = y_2 - y_1$, and so

$$z_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}(y_2 - y_1).$$

So z_n's alternate sign and $|z_n|$ decreases to 0.

Hence

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-2} &= (y_n - y_{n-1}) - (y_{n-1} - y_{n-2}) \\ &= z_n - z_{n-1} \begin{cases} > 0 & \text{if } n \text{ even} \\ < 0 & \text{if } n \text{ odd} \end{cases} \end{aligned}$$

Also, since z_n's alternate sign,

$$y_1 < y_3 < y_5 < \cdots < y_6 < y_4 < y_2.$$

Thus $\{y_{2k}\}_k$ is a decreasing sequence bounded from below, and $\{y_{2k-1}\}_k$ is an increasing sequence bounded from above.

অর্থাৎ ছবি দেখে যে প্যাটার্ণটা আন্দাজ করেছিলাম, সেটা প্রমাণ হল।

Thus $y_{2k} \to L_1$ and $y_{2k-1} \to L_2$ for some L_1, L_2.
Since $z_n \to 0$ so $L_1 = L_2 = L$, say.
$\because$ every natural number is either of the form $2k$ or $2k-1$
$\therefore y_n \to L$, as required.

■

Exercise 5: If x_1, x_2 are arbitrary real numbers, $\alpha \in (0,1]$, and $x_n = \alpha x_{n-1} + (1-\alpha)x_{n-2}$ for every positive integer $n (> 2)$, then show that the sequence $\{x_n\}_n$ is convergent. ■

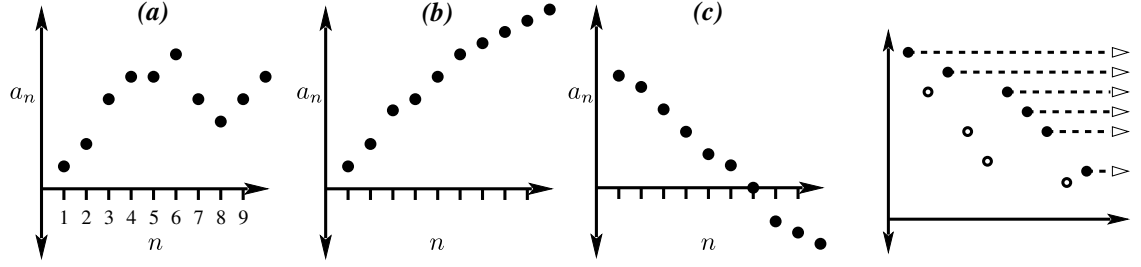



Fig 3 **Fig 4**

এবার একটা ছোট্টো ঠকানো অংক দিই, এতে ভাষার একটা সূক্ষ্ম প্যাঁচ আছে, ধরতে পারো কি না দ্যাখো!

Exercise 6: একটা sequence-এর সবগুলো convergent subsequence-ই যদি একই limit-এ converge করে, তবে মূল sequence-টাও কি convergent হবেই? ■

1.1 Bolzano-Weierstrass for sequences

আমরা বারবারই বলছি যে একটা sequence নিজে converge না করলেও তার কোনো একটা subsequence কিন্তু converge করলেও করতে পারে। এবার এই কথাটারই একটা আরো জোরদার সংস্করণ এবার প্রমাণ করব-- একটা sequence যদি bounded হয় তবে তার অন্ততঃ একটা subsequence কিন্তু converge করবেই! এই কথাটাকে বলে **Bolzano-Weierstrass theorem for sequences.** আগে আমরা যে Bolzano-Weierstrass theorem for sets করেছিলাম, তার সঙ্গে এর ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক আছে, সেটা আমরা একটু পরেই দেখব।

Example 7: Prove that every bounded sequence in $\mathbb{R}$ has a convergent subsequence. [4] **(2001,2003,2011)**

SOLUTION: এই অংকটা কিছু বড়, তাই ধাপে ধাপে করব।

> Step 1 : Shall show: Every sequence has either a nondecreasing or a non-increasing subsequence:

কোনো sequence-এর গ্রাফ আঁকার ব্যাপারটা এবার খুব কাজে আসবে। একটু ঝালিয়ে নেওয়া যাক। Fig 3(a)-তে একটা sequence-এর গ্রাফ রয়েছে। এটা কখনো উঠছে, কখনো নামছে, অর্থাৎ increasing বা decreasing কোনোটাই নয়। Fig 3(b)-র sequence-টা কিন্তু increasing. আর Fig 3(c)-রটা decreasing.
এবার একটা নতুন জিনিস আমদানী করব--

> Call $n \in \mathbb{N}$ a "balcony" if $\forall k > n$ we have $a_n > a_k$.

এই "balcony" কথাটা কোনো standard term নয়, কেবল আমাদের লেখার সুবিধার জন্য তৈরী করা। ব্যাপারটা বোঝার জন্য Fig 4 দ্যাখো। এখানে কালো কালো বিন্দুগুলো হল balcony. সাদাগুলো নয়। ছবি দেখে এটা কি করে বোঝা যাচ্ছে? ধরো তুমি একটা কালো বিন্দুতে আছো, সেখান থেকে সোজা ডানদিকে তাকাও, ড্যাশ্ ড্যাশ্ তীর চিহ্ন বরাবর। লক্ষ কর যে তোমার দৃষ্টি কোথাও বাধা পাবে না, অর্থাৎ ডানদিকের আর কোনো বিন্দু তোমার ওপরে মাথা তোলেনি। এই জন্যই কালো বিন্দুগুলো balcony. কিন্তু সাদা বিন্দু থেকে সোজা সামনে তাকালে দেখবে কোনো না কোনো বিন্দু সামনে আরো উঁচু হয়ে দাঁড়িয়ে রয়েছে। তাই সাদা বিন্দুগুলো balcony নয়।

> Let B be the set of all balconies.

এবার দুটো case আছে--হয় মোট balcony-র সংখ্যা infinite নয় finite.

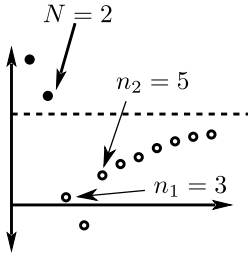



Fig 5

Case I: If $|B| = \infty$, then write B as

$$B = \{n_1, n_2, ...\}$$

with $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.

এই রকম একটা উদাহরণ হল Fig 4. এখানে $n_1 = 1$, তারপরের বিন্দুটা balcony নয়, তাই $n_2 = 3$. তারপর দুটো ছেড়ে $n_3 = 6$, এই রকম। দেখতেই পাচ্ছ যে কালো বিন্দুগুলো সব নীচের দিকে নামছে। কারণ ওপরে উঠতে গেলেই তো আগেরটার balcony হওয়া বন্ধ হয়ে যাবে।

Then the sequence $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, ...$ must be a decreasing subsequence.

সুতরাং infinitely many balcony থাকলে একটা decreasing subsequence বার করে দেওয়া গেল। এবার দেখাব যে balcony-র সংখ্যা finite হলে একটা nondecreasing subsequence থাকতে বাধ্য (Fig 5)।

Case II: If $|B|$ is finite , then let N be the last balcony.

ছবিতে $N = 2$. সুতরাং প্রথম বিন্দু যেটা balcony নয়, সেটা হল $n_1 = 3$ নম্বর বিন্দুটা।

Let $n_1 = N + 1$. Since N was the last balcony, n_1 cannot be a balcony,

যেহেতু 3 নম্বর বিন্দুটা balcony নয়, তার মানে কেউ একটা ওর সামনে মাথা উঁচু করে দাঁড়িয়ে আছে। এক্ষেত্রে এরকম একটা বিন্দু হল $n_2 = 5$ নম্বর বিন্দুটা। তেমনি আবার 5 নম্বর -কে গার্ড দিয়ে আছে $n_3 = 6$ নম্বর বিন্দুটা। এইভাবে চলতেই থাকবে।

i.e., $\exists n_2 > n_1$ such that $a_{n_2} \geq a_{n_1}$.
Again, $n_2 > N$, and so n_2 also cannot be a balcony.
$\therefore \exists n_3 > n_2$ such that $a_{n_3} \geq a_{n_2}$.
Continuing in this way we get a nondecreasing subsequence

$$a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq a_{n_3} \cdots ,$$

as required.

এবার দ্বিতীয় ধাপ--

<u>Step 2</u>: We know that every bounded monotone sequence converges.
Since the given sequence is bounded, so the monotone subsequence from <u>step 1</u> is bounded.
So it must be convergent, completing the proof.

■

Exercise 7: Prove that every sequence of real numbers has a monotone subsequence.[4] **(2012.4b)**
HINT:
আগের অংকটার প্রথম ধাপটা খালি লিখে দিলেই হবে। ■

Exercise 8: Find a convergent subsequence of the bounded sequence $\{a_n\}_n$, where

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

■

Exercise 9: আচ্ছা, Bolzano-Weierstrass theorem for sequences-এ কি sequence-টার bounded হওয়ার সত্যিই কোনো দরকার আছে? এমন কোনো unbounded sequence কি সম্ভব যার কোনোই convergent subsequence নেই? ■

Exercise 10: এমন একটা unbounded sequence দাও যার একটা convergent subsequence আছে। ■

?? পাতার ?? নম্বর অংকে একটা প্যাঁচ ছিল। একই প্যাঁচ কি bounded sequence-দের ক্ষেত্রেও খাটে? এবারের অংকটার উপজীব্য বিষয় সেটাই। এটা কিন্তু একটু ভেবে কষার অংক!

Exercise 11: If all convergent subsequences of a bounded sequence converge to the same limit, then the sequence itself must converge to the same limit. Prove this. ■

Fig 6

1
-1

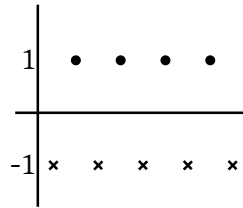
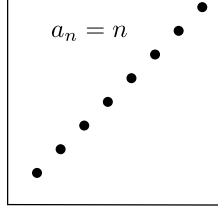



Fig 7

DAY 2
Subsequential limits

ধরো একটা sequence $\{a_n\}_n$ আছে। ধরো $\{a_{n_k}\}_k$ তার একটা convergent subsequence, যার limit হল কোনো সংখ্যা L (মানে $a_{n_k} \to L$). তবে L-কে বলব $\{a_n\}_n$-এর একটা **subsequential limit.**

Example 8: যদি আমাদের sequence-টা হয় $\{a_n\}_n$, যেখানে $a_n = (-1)^n$, তবে এর subsequential limit-গুলো কি কি?

SOLUTION: Fig 6-এ এই sequence-টার গ্রাফ এঁকেছি। লক্ষ কর এখানে even term-গুলো সব 1-এ converge করছে (ডট্ দিয়ে দেখিয়েছি), আর odd term-গুলো যাচ্ছে -1-এ (ক্রস দিয়ে দেখিয়েছি)। তার মানে 1 আর -1 দুজনেই subsequential limit. আর কোনো subsequential limit কি বাদ রইল? না, তার কারণ একটা sequence-এর যে কোনো term-ই হয় odd term নয় even term. ■

Exercise 12: Find all the subsequential limits of $\{a_n\}_n$, where $a_n = \frac{1}{n}$. ■

Example 9: Find all the subsequential limits of $\{a_n\}_n$, where $a_n = n$.

SOLUTION: এখানে $a_n \to \infty$. সুতরাং যেই subsequence-ই নিই না কেন সেটাও ∞-তে diverge করবে (Fig 7). তার মানে কোনো subsequence-ই converge করছে না। সুতরাং এই sequence-টার কোনো subsequential limit নেই। ■

Exercise 13: Find all the subsequential limits of $\{a_n\}_n$, where

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{if } n \text{ is even} \\ n & \text{otherwise} \end{cases}$$

■

Exercise 14: এমন একটা sequence $\{a_n\}_n$ দিতে পারো যার একটাই মাত্র subsequential limit 2, কিন্তু তাও $a_n \not\to 2$? ■

Exercise 15: এমন একটা <u>bounded</u> sequence $\{a_n\}_n$ দিতে পারো যার একটাই মাত্র subsequential limit 2, কিন্তু তাও $a_n \not\to 2$? ■

Exercise 16: Let $\{a_n\}_n$ be a sequence such that every $n \in \mathbb{N}$ is a subsequential limit. Show that there must be a subsequence diverging to ∞. ■

2.1 Limit point of a sequence

আমরা চতুর্থ অধ্যায়ে শিখেছি একটা set-এর limit point বলতে কি বোঝায়। এই "limit point" কথাটা আবার sequence-এর ক্ষেত্রেও ব্যবহৃত হয়, কিন্তু সামান্য অন্য অর্থে। আমরা এতক্ষণ যাকে subsequential limit বলছিলাম, সেটারই আরেক নাম **limit point of a sequence.** আমরা set-এর বেলায় দেখেছি যে limit point মানে হল সেই সব point যারা ভীড়ের মধ্যে অথবা ভীড়ের একেবারে গা ঘেঁসে রয়েছে। Subsequential limit-গুলোর ক্ষেত্রেও ব্যাপারটা একইরকম। একটা subsequence-এর প্রতিটা term-কে যদি একটা লোক ভাবি, তবে তারা subsequential limit-এ এসে ভীড় জমাচ্ছে।

তবে set-এর limit point আর sequence-এর limit point-এর মধ্যে একটা গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। আমরা জানি যে একটা set-এ প্রত্যেকটা element খালি একবারই থাকে, কিন্তু একটা sequence-এর বেলায় একই সংখ্যা বিভিন্ন term রূপে উপস্থিত থাকতে পারে। যেমন যদি $\{a_n\}_n$ নিই যেখানে $a_n = (-1)^n$, তবে পাব

$$-1, 1, -1, 1, -1, ...$$

sequence-টা। এখানে যাবতীয় odd term-ই হল -1. যদি set হিসেবে ভাবি তবে খালি দুটো element পাবো--1 আর -1. সুতরাং এখানে ভীড়ের কোনো প্রশ্নই নেই। তার মানে $\{-1, 1\}$ set-টার কোনো limit point নেই। কিন্তু sequence হিসেবে দেখলে -1-এ যাবতীয় odd term-গুলো ভীড় করে আছে (বা ঘুরিয়ে বললে $a_1, a_3, a_5, ...$ subsequence-টার limit হল -1). তাই -1 কিন্তু $\{a_n\}_n$-এর limit point!

এই limit point কথাটা এই কারণে কিছু গোলমেলে--set-এর বেলায় limit point বলতে এক জিনিস বোঝায়, আর sequence-এর বেলায় একটু অন্য জিনিস বোঝায়। এই গোলমাল এড়াতে অনেকে set-এর বেলায় limit point কথাটা ব্যবহার না করে accumulation point বলতে ভালোবাসেন, যদিও সকলেই তা করেন না। সুতরাং কোনো জায়গায় যদি limit point কথাটার উল্লেখ পাও, তবে সাবধান, ভালো করে বুঝে নিও যে কোন ধরণের limit point-এর কথা হচ্ছে--set-এর না sequence-এর!

কিন্তু set-এরই হোক বা sequence-এরই হোক, যে কোনো limit point-এর পিছনেই মূল ধারণাটা একই--যেখানেই ভীড় দেখবে সেখানেই ভীড়ের মধ্যের বা গায় লেগে থাকা point-গুলো limit point হবে। এই ধারণার উপর ভিত্তি করে আমরা চতুর্থ অধ্যায়ে set-এর limit point-এর definition দিয়েছিলাম। একইভাবে আমরা sequence-এর limit point-এরও একটা definition দিতে পারি। খালি সেই পার্থক্যটা খেয়াল রাখতে হবে--set-এর ক্ষেত্রে একটা সংখ্যা কেবল একবারই element হয়ে আসতে পারে, কিন্তু sequence-এর বেলায় একই সংখ্যা বিভিন্ন term-রূপে থাকতে পারে। ফলে এখানে definition-টা দাঁড়াবে এই রকম--

DEFINITION: **Limit point of sequence**

A number $L \in \mathbb{R}$ is called a **limit point of a sequence** if $\forall \epsilon > 0$ the neighbourhood $N(L, \epsilon)$ contains infinitely many terms of the sequence.

লক্ষ কর যে এই definition-এ কোনো <u>deleted</u> neighbourhood-এর কথা নেই। তার বদলে আছে একটা "infinitely many"-র ব্যাপার।

আমরা আগেই বলেছি যে sequence-এর ক্ষেত্রে limit point এবং subsequential limit এই দুটো কথা সমার্থক, মানে যদি তোমাকে একটা limit point L দিই, তবে তুমি সবসময়েই এমন একটা subsequence খুঁজে বার করতে পারবে

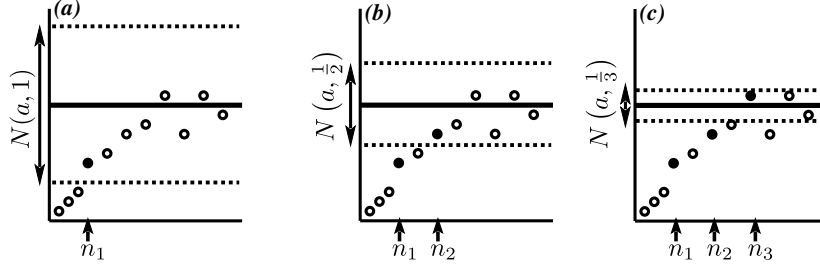



Fig 8

যেটা গিয়ে ঠিক L-এই converge করে। বিপরীত পক্ষে, যদি তোমাকে কোনো convergent subsequence দিই তবে তার limit-টা মূল sequence-এর একটা limit point হতে বাধ্য। নীচের অংকে এটাই প্রমাণ করতে দিয়েছে।

Example 10: Prove that a limit point of a sequence is a subsequential limit of the sequence.[4] **(2007)**

SOLUTION: প্রথমে লিখে নিই কি দেখাতে হবে।

> Let a be a limit point $\{a_n\}_n$. Shall show a subsequence $\{a_{n_k}\}_k$ such that $a_{n_k} \to a$.

এবার limit point of a sequence-এর definition-টা কাজে লাগাব--

> By definition of limit point of a sequence,
>
> $\forall \epsilon > 0 \ N(a, \epsilon)$ contains infinitely many a_n's.

আমরা করব কি, এই definition-টাকেই বার বার লাগাবো, প্রত্যেকবার neighbourhood-টাকে ছোটো করতে করতে। Fig 8 দ্যাখো। এখানে মোটা লাইনটা হচ্ছে a. এই ছবির (a)-তে আমরা a-কে ঘিরে $N(a, 1)$ neighbourhood-টা নিয়েছি। এটা যেন একটা ফাঁদ, আমরা ওৎ পেতে বসে আছি কখন একটা a_n এর মধ্যে ঢুকে পড়ে। যেই একটা ঢুকবে, অমনি আমরা সেটা খপ্ করে চেপে ধরে a_{n_1} নাম দিয়ে দেব।

> Take $\epsilon_1 = 1$. Then we have some n_1 with $a_{n_1} \in N(a, 1)$.

তারপর ফাঁদটাকে আরো টাইট করে আনব, অর্থাৎ neighbourhood-টাকে আরো ছোটো নেব। যেমন Fig 8(b)-তে $N(a, 1/2)$ নিয়েছি।

> Taking $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$, we have $n_2 > n_1$ with $a_{n_2} \in N(a, \frac{1}{2})$.

a_{n_1} তো আগেই ফাঁদে পড়েছিল, এবার তাই আমরা n_1-এর পর থেকে ওৎ পেতেছি। তাই $n_2 > n_1$ পেয়েছি। এইটা কিন্তু খুব দরকারী, কারণ $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ একটা subsequence হবার জন্য $n_1 < n_2 < \cdots$ হওয়া দরকার।
এবার এই কাজ বার বার করে যেতে হবে। Fig 8(c) দ্যাখো। পর পর ফাঁদে পড়বে, আর আমরা প্রতি ধাপে ফাঁদ টাইট করে যাবো।

> Continuing like this we get

$n_1 < n_2 < \cdots$ with

$$a_{n_k} \in N(a, \tfrac{1}{k}) \text{ or } a_{n_k} \to a,$$

as required.

■

এর পরের অংকে এর উল্টো দিকটা দেখাতে বলেছে। এটা দেখানো মোটেই কঠিন নয়, চেষ্টা করে দ্যাখো!

Exercise 17: Prove that any subsequential limit is a limit point of a sequence. ■

মনে আছে নিশ্চয়ই যে, আমরা কোনো set-এর সব limit point-এর set-টার নাম দিয়েছিলাম derived set, এবং দেখিয়েছিলাম যে derived set সবসময়ে closed হয়? ঠিক একইভাবে একটা sequence-এর যাবতীয় subsequential limit নিয়ে যে set-টা হয়, সেটাও সর্বদা closed হয়। এবার সেইটা প্রমাণ করব।

Example 11: Prove that the set of subsequential limits of a sequence $\{x_n\}_n$ is a closed set.[3] **(2006)**

SOLUTION: প্রথমে set-টার একটা নাম দিয়ে নিই--

Let A be the set of subsequential limits of $\{x_n\}_n$.

তারপর লিখি কি দেখাতে হবে--

To show: A is closed,

i.e, A^c is open,

i.e,

$\forall a \in A^c \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(a, \epsilon) \subseteq A^c.$

প্রথমে $\forall a \in A$ আছে, তাই--

Take any $a \in A$.

এবার আছে $\exists \epsilon > 0$, অতএব যুৎসই একটা ϵ পেতে হবে।

Since a is not a subsequential limit, so $\exists \epsilon > 0$ such that $N(a, \epsilon)$ contains only finitely many x_n's.

Choose this ϵ.

এবার দেখাব যে $N(a, \epsilon) \subseteq A^c$, অর্থাৎ $N(a, \epsilon)$ থেকে যে কোনো একটা element নিয়ে দেখাব যে সেটা A^c-এও আছে।

Shall show, $N(a, \epsilon) \subseteq A^c$,

i.e.,

$\forall y \in N(a, \epsilon) \quad y \in A^c.$

Take any $y \in N(a, \epsilon)$.

$\because N(a,\epsilon)$ is open,
$\therefore \exists \delta > 0 \quad N(y,\delta) \subseteq N(a,\epsilon)$,
$\therefore N(y,\delta)$ contains only finitely many x_n's.
So y cannot be a subsequential limit of $\{x_n\}_n$,
i.e., $y \in A^c$.
So $N(a,\epsilon) \subseteq A^c$, as required.

■

2.1.1 Relation to limit point of a set

এক্ষুণি বললাম যে limit point কথাটা real analysis-এর দুই অর্থে ব্যবহৃত হয়-- এক, কোনো set-এর limit point হিসেবে, আর দুই, কোনো sequence-এর limit point হিসেবে। দুই ক্ষেত্রে সংজ্ঞাদুটো খানিকটা আলাদা। কিন্তু তা সত্ত্বেও এই দুই ধরণের limit point-এর মধ্যে কিছু সম্পর্ক আছে, যেটা আমরা এবার আলোচনা করব।
Sequence-এর সঙ্গে set-এর অন্যতম পার্থক্য এই যে, একটা set-এর কোনো element একাধিকবার আসতে পারে না, কিন্তু sequence-এর বেলায় একই সংখ্যা যতবার খুশী আসতে পারে, যেমন

$$-1, 1, -1, 1, \ldots$$

sequence-টায় 1 আর -1 দুটোই বার বার ফিরে ফিরে আসছে। যদি আমরা একটা sequence-এর যাবতীয় সংখ্যাকে খালি একবার করে রাখি তবে আমরা একটা set পাব, তাকে বলব sequence-টার **underlying set.** যেমন

$$-1, 1, -1, 1, \ldots$$

sequence-টার underlying set হল $\{-1, 1\}$. আবার

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

sequence-টায় কোনো সংখ্যাই একাধিকবার আসে নি, ফলে underlying set-টা হল $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
Set-এর limit point আর sequence-এর limit point-এর মধ্যে প্রথম সম্পর্কটা এইরকম-- ধরো একটা sequence $\{a_n\}_n$-এর underlying set হল A. তবে A set-এর limit point-রা সবাই $\{a_n\}_n$ sequence-এর limit point হতে বাধ্য। নীচের অংকে এটা প্রমাণ করতে দিয়েছে। এই প্রমাণটা হবে ঠিক ষষ্ঠ অধ্যায়ের ?? পাতার ?? নম্বর অংকের মত।

Exercise 18: Let $\{a_n\}_n$ be any sequence with underlying set A. Let ℓ be any limit point of the set A. Then show that ℓ must be a limit point of the sequence $\{a_n\}_n$. ■

এর উল্টো কথাটা কিন্তু ঠিক নয়, অর্থাৎ $\{a_n\}_n$ sequence-এর সব limit point কিন্তু A set-এর limit point নাও হতে পারে। একটা counter example দ্যাখো--

Example 12: ধরো এই sequence-টা দিলাম-- $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ এর underlying set হল $A = \{-1, 1\}$.

এখানে sequence-টার দুটো limit point আছে, -1 আর 1. কিন্তু এরা মোটেই A set-টার limit point নয়। আসলে A যেহেতু একটা finite set, তাই A set-টার কোনোই limit point নেই। ■

এই ঘটনাটা ঘটতে পারল কারণ sequence-টায় -1 আর 1 দুজনেই infinite বার ফিরে ফিরে এসেছে, কিন্তু underlying set-এর মধ্যে ওরা আছে খালি একবার করে। Set-এর limit point আর sequence-এর মধ্যে দ্বিতীয় সম্পর্কটা তাই

এইরকম-- যদি একটা sequence-এর সব term হয় distinct (মানে সবাই আলাদা আলাদা), তবে sequence-টার সব limit point-ই তার underlying set-এরও limit point হতে বাধ্য।

Example 13: $\{\frac{1}{n}\}_n$ এই sequence-টায় সব term হল distinct. এটার একটাই limit point, 0. এবং সেটা এর underlying set $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$-এরও limit point, ■

Example 14: Let the sequence $\{x_n\}_n$ be such that $x_n \neq x_m$ for $n \neq m$. Prove that every subsequential limit of $\{x_n\}_n$, if exists, is a limit point of the set $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.[3] **(2013.4b)**

SOLUTION:

Let ℓ be a subsequential limit of $\{x_n\}_n$.
Shall show that ℓ is a limit point of $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$,
ie,

$\forall \epsilon > 0 \quad N'(\ell, \epsilon) \cap A \neq \phi$.

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because \ell$ is a subsequential limit of $\{x_n\}_n$,
$\therefore \exists \{x_{n_k}\}_k \quad x_{n_k} \to \ell$.
So

$$\exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad x_{n_k} \in N(\ell, \epsilon).$$

In particular, $x_{n_K}, x_{n_{K+1}} \in N(\ell, \epsilon)$
Since he x_n's are all distinct, $x_{n_K} \neq x_{n_{K+1}}$.
So at least one of them must be $\neq \ell$.
Hence at least one of them must be in $N'(\ell, \epsilon)$.
Thus $N'(\ell, \epsilon) \cap A \neq \phi$, as required.

■

Set-এর limit point আর sequence-এর মধ্যে তৃতীয় সম্পর্কটা এইরকম-- ধরো E একটা set, আর c হল সেই set-এর একটা limit point. তবে E-এর মধ্যে এমন একটা sequence $\{x_n\}_n$ পাব, যাতে $x_n \to c$ হয়। শুধু তাই নয়, $\{x_n\}_n$-কে এমনভাবে নেওয়া সম্ভব যাতে তার term-গুলো সব distinct হয়। এই কথাটা আমরা ষষ্ঠ অধ্যায়ে ?? পাতার ?? নম্বর অংকেই প্রমাণ করেছিলাম।

DAY 3
Limsup and liminf

আমরা দেখেছি যে oscillating sequence-রা হল সবচেয়ে ঝামেলাজনক sequence. বাকীদের ক্ষেত্রে আমরা limit-এর প্রসঙ্গ তুলতে পারি (finite বা infinite যাই হোক), কিন্তু এদের বেলায় limit ব্যাপারটার কোনো মানেই হয় না। এইবার আমরা একটা কায়দা শিখব oscillating sequence-দের শায়েস্তা করার জন্য। আমরা limsup আর liminf বলে দুটো

জিনিস শিখব, এরা অনেকটা limit-এর মতই, খালি বাড়তি সুবিধা হল এরা oscillating sequence-দের ক্ষেত্রেও থাকে। আমরা প্রথমে খালি bounded sequence নিয়ে কাজ করব। ধরো একটা কোনো bounded sequence দিলাম। তার সবচেয়ে বড় subsequential limit-টাকে বলব sequence-টার limsup, আর সবচেয়ে ছোটো subsequential limit-টাকে বলব sequence-টার liminf.

Example 15: যদি $a_n = (-1)^n$ হয় তবে $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ আর $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ বার কর।

SOLUTION: এখানে $\overline{\lim}_{n\to\infty}$ মানে limsup আর $\underline{\lim}_{n\to\infty}$ মানে $\liminf$.
আমরা আগেই দেখেছি যে, $\{a_n\}_n$-এর দুটো মাত্র subsequential limit– 1আর -1. এদের মধ্যে বড়টা হল limsup, আর ছোটোটা liminf, মানে

$$\overline{\lim} a_n = 1 \text{ আর } \underline{\lim} a_n = -1.$$

■

Limsup কথাটা আসলে limit superior-এর সংক্ষিপ্ত রূপ, আর liminf কথাটার পুরোটা হল limit inferior. অনেক সময়ে লোকে এদের upper limit আর lower limit-ও বলে থাকে।

Example 16: Define the limit inferior λ and limit superior μ of a bounded sequence $\{x_n\}_n$ of real numbers. [1+1] **(2002)**

SOLUTION:

DEFINITION: **Liminf and Limsup (defn 1)**

Let $\{x_n\}_n$ be a bounded sequence. Let A be the set of all its subsequential limits. Then the limit inferior of the sequence is defined as

$$\lambda = \inf A = \min A,$$

and the limit superior is defined as

$$\mu = \sup A = \max A.$$

এই definition-টা দেখে দুটো প্রশ্ন আসে--এক, কি করে জানলাম যে A set-টার sup আর inf আছে? তার জন্য তো nonempty, bounded এসব দেখা দরকার। আর দুই, যদিও বা sup, inf থাকে, কি করে বলতে পারলাম যে $\sup A = \max A$ আর $\inf A = \min A$? Sup আর inf তো সব সময়ে max আর min হয় না, যেমন $\sup(0,1) = 1$, কিন্তু তা বলে 1 মোটেই $\max(0,1)$ নয়! সুতরাং এখানে কিছু শর্ত পরীক্ষা করা দরকার। Bolzano-Weierstrass theorem-এর দৌলতে আমরা পাচ্ছি $A \neq \phi$. আবার sequence-টা bounded বলে A-ও bounded.) সুতরাং $\sup A, \inf A$ দুজনেই exist করে। আবার A হল closed, তাই $\sup A, \inf A$ দুজনেই A-র ভিতরেই থাকতে বাধ্য, তাই ওরা আসলে $\max A$ আর $\min A$.

Note: $\because \{x_n\}_n$ is a bounded sequence, $\therefore A$ is bounded. Also, by Bolzano-Weierstrass, $A \neq \phi$.

$\therefore \inf A$ and $\sup A$ exist.

Further, $\because A$ is closed, $\therefore \inf A = \min A$ and $\sup A = \max A$.

মজার কথা এই যে, $\limsup$ আর $\liminf$-এর সংজ্ঞা আরেকভাবেও দেওয়া যায়, যেটা দেখতে সম্পূর্ণ অন্যরকম (যদিও মানেটা একই দাঁড়ায়)--

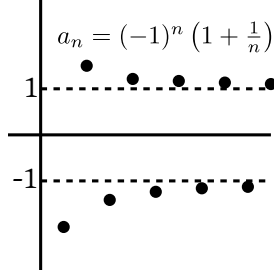
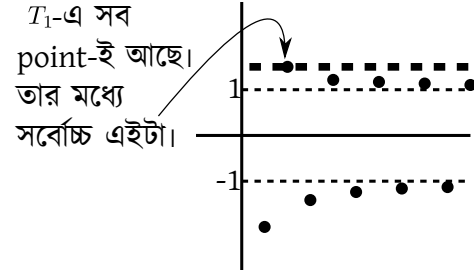



Fig 9 **Fig 10**

> **DEFINITION: Liminf and Limsup (defn 2)**
> The <u>limit inferior</u> λ and <u>limit superior</u> μ of a bounded sequence $\{x_n\}_n$ are defined as
>
> $$\lambda = \lim_n \left(\inf\{x_k : k \geq n\}\right)$$
>
> and
>
> $$\mu = \lim_n \left(\sup\{x_k : k \geq n\}\right).$$

এখানেও বলে দেওয়া ভালো যে, sup, inf-গুলো কেন exist করবে, এবং কেনই বা তাদের limit নেওয়া যাবে।

> <u>Note:</u> Since $\{x_n\}_n$ is a bounded sequence, so $\{x_k : k \geq n\}$ has both sup and inf. Also, the sup's (inf's) form a bounded, decreasing (increasing) sequence, and hence converge.

■

এই দুটো definition যে আসলে একই সেটা প্রমাণ করা কিছু কঠিন নয়, কিন্তু আমরা সেই প্রমাণে যাব না। তার চেয়ে বরং একটা উদাহরণ নিয়ে ব্যাপারটা বোঝা যাক।

Example 17: Fig 9-এ একটা sequence-এর গ্রাফ আছে। দুটো definition দিয়েই আলাদা করে lim sup বার করে দ্যাখো যে একই উত্তর আসে।

Fig 11

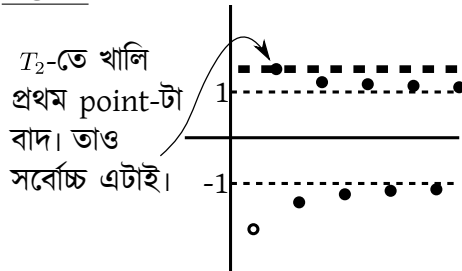
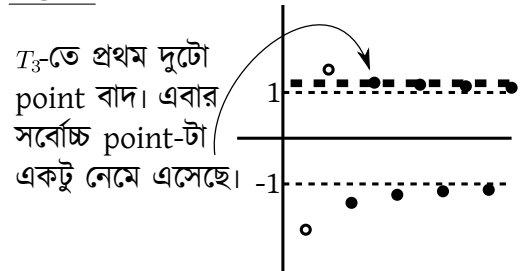



Fig 12

SOLUTION: ছবি দেখেই বুঝতে পারছ যে, দুটো মাত্র subsequential limit আছে--1 আর -1. অতএব প্রথম definition অনুযায়ী lim sup হল 1 আর lim inf হল -1. এবার দ্বিতীয় definition কি বলে দেখি।
এর জন্য প্রথমে $T_n = \{a_k \ : \ k \geq n\}$ বার করতে হবে। লক্ষ কর যে T_n হল $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ ইত্যাদি নিয়ে তৈরী set. Fig 10-তে T_1, T_2 আর T_3 সদস্যদের কালো কালো ডট্ দিয়ে দেখানো হয়েছে। এর পরের কাজ হল $\sup T_n$ বার করা, মানে T_n-এর মধ্যে সবচেয়ে উঁচুতে কোথায় ডট্ আছে দেখা। Fig 10, Fig 11 আর Fig 12-তে এই সর্বোচ্চ উচ্চতাগুলো মোটা ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইন দিয়ে দেখিয়েছি। লক্ষ কর যে, এই লাইনগুলো ক্রমশঃ 1-এর দিকে নেমে আসছে। অর্থাৎ

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup T_n\right] = 1.$$

তার মানে দ্বিতীয় definition থেকেও একই উত্তর পেলাম। ■

Example 18: The n-th term of a sequence $\{a_n\}_n$ is given by

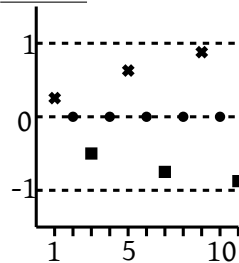
$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Find two subsequences of $\{a_n\}_n$ one of which converges to the upper limit and the other converges to the lower limit of $\{a_n\}_n$.[3] **(2001)**
SOLUTION: যদি একটু আগের (??) নম্বর অংকটা করে থাকো, তবে এই অংকটাও সহজ লাগবে। Sequence-টা sin-টাইন নিয়ে বেশ জাঁদরেলগোছের দেখতে, কিন্তু n-এর কয়েকটা value বসিয়ে দেখলেই বুঝবে যে আসলে তেমন বিদঘুটে কিছু নয়। যদি n কোনো জোড় সংখ্যা হয়, তবে--

Here

$$a_{2k} = \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \sin \frac{2k\pi}{2} = 0 \to 0.$$

যদি n বিজোড় হয়, তবে একটু ভালো করে দেখতে হবে। ধর, $n = 1$ তবে $\sin \frac{n\pi}{2} = 1$. যদি $n = 3$ হয় তবে $\sin \frac{n\pi}{2} = -1$. আবার $n = 5$ হলে $\sin \frac{n\pi}{2} = 1$, এইভাবে ± 1 করে চলতে থাকবে। কোন কোন n-এর ক্ষেত্রে 1 হবে? $n = 1, 5, 9, ..$ এদের জন্য, অর্থাৎ যে সব সংখ্যাকে $4k + 1$ হিসেবে লেখা যায়--

Fig 13

Also,

$$\begin{aligned} a_{4k+1} &= \left(1 - \frac{1}{(4k+1)^2}\right) \sin \frac{(4k+1)\pi}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{(4k+1)^2} \\ &\to 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

বাকী রইল $n = 4k + 3$ টাইপের সংখ্যাগুলো--

Similarly,

$$\begin{aligned} a_{4k+3} &= \left(1 - \frac{1}{(4k+3)^2}\right) \sin \frac{(4n+3)\pi}{2} \\ &= -\left(1 - \frac{1}{(4k+3)^2}\right) \\ &\to -(1-0) = -1. \end{aligned}$$

তার মানে আমাদের sequence-টা দাঁড়ালো Fig 13-এর মত। এখানে a_{2k}-রা সবাই 0 (ডট্ দিয়ে দেখিয়েছি), আর a_{4k+1}-রা যাচ্ছে 1-এর দিকে (ক্রস দিয়ে দেখিয়েছি), এবং a_{4k+3}-রা যাচ্ছে -1-এর দিকে (চৌকো দিয়ে দেখিয়েছি)। যেহেতু যেকোনো integer-ই হয় $2k$ নয়তো $4k + 1$ নয়তো $4k + 3$ চেহারার সুতরাং এখানে তিনটেই মাত্র limit point: $-1, 0$ আর 1.

Since every positive integer is either of the form $2k$ or $4k+1$ or $4k+3$, so these are the only possible subsequential limits. Hence the sequence has exactly three limit points: $-1, 0$ and 1.

আমরা জানি যে সবচেয়ে বড় limit point-টাই হল upper limit, আর সবচেয়ে ছোটোটা হল lower limit. সুতরাং--

Thus the upper limit is 1, which is the largest limit point.

The lower limit point is -1, which is the smallest limit point.

Thus, $\{a_{4k+1}\}_k$ is a subsequence converging to the $\limsup$,

and $\{a_{4k+3}\}_k$ is a subsequence converging to the $\liminf$.

■

Exercise 19: Find $\overline{\lim} a_n$ and $\underline{\lim} a_n$ if

$$a_n = \left(2 \cos \frac{n\pi}{2}\right)^{(-1)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

[4] **(2012.4a)**

HINT:

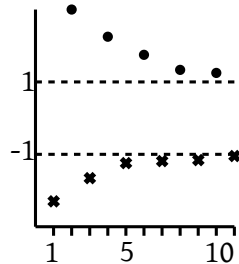



Fig 14

এই অংকটা আগেরটারই মত। প্রথম কয়েকটা term বার করে দ্যাখো কোনো প্যাটার্ণ পাও কিনা--

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \tfrac{1}{2}, \ a_5 = 0, \quad a_6 = -\tfrac{1}{2}, ...$$

আশা করি প্যাটার্ণটা বুঝতে পারছ। Odd term-গুলো সবাই 0, আর even term-গুলো একবার $\frac{1}{2}$ হয় একবার $-\frac{1}{2}$ হয়। সুতরাং এবার উত্তরটা আগের অংকের মতই গুছিয়ে লিখে ফেলতে পারা উচিত। ■

Example 19: Find the upper limit and lower limit of the sequence $\{a_n\}_n$ where $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$, $(n = 1, 2, 3...)$. Find a subsequence of this sequence that converges to the lower limit.[3] **(2000)**

SOLUTION: যেহেতু এখানে একটা $(-1)^n$ আছে তাই even subsequence আর odd subsequence দুটোকে আলাদা করে দেখা ভালো।

> Here
> $$a_{2k} = \left(1 + \frac{1}{2k}\right) \to 1,$$
> and
> $$a_{2k-1} = -\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) \to -1.$$

তার মানে sequence-টা দাঁড়ালো Fig 14-এর মত, even term-গুলো ছুটেছে 1-এর দিকে (ডট্ দিয়ে দেখিয়েছি), আর odd term-রা ছুটেছে -1-এর দিকে (ক্রস দিয়ে দেখিয়েছি)। যেহেতু সব term-ই হয় even নয় odd, তাই এই sequence-টার দুটোই মাত্র sequential limit, 1 আর -1.

> Since any $n \in \mathbb{N}$ is either of the form $2k$ or $2k-1$, so this sequence has exactly two subsequential limits, -1 and 1.

এদের মধ্যে সবচেয়ে বড়টা হল upper limit, আর সবচেয়ে ছোটোটা হল lower limit–

> So the upper limit is 1, the largest subsequential limit, and the lower limit is -1, the smallest subsequential limit.

এক্ষুণি দেখলাম যে odd term-গুলো -1-এর দিকে যাচ্ছে। তাই প্রশ্নের দ্বিতীয় অংশের উত্তর হল--

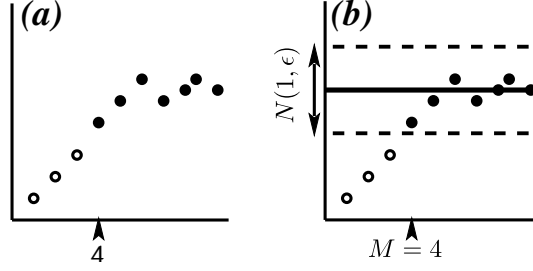



Fig 15

> A subsequence that converges to the lower limit is $\{a_{2k-1}\}_k$.

■

3.1 Checking convergence

যদি কোনো bounded sequence-এর $\liminf$ আর $\limsup$ সমান হয়, তবে sequence-টা converge করতে বাধ্য। বিপরীতপক্ষে যদি একটা sequence converge করে, তবে তার $\liminf$ আর $\limsup$ সমান হবেই।

Example 20: Prove that a bounded sequence $\{x_n\}_n$ converges to l iff

$$\lim_{n\to\infty}(\sup x_n) = l = \lim_{n\to\infty}(\inf x_n).$$

[3] **(2005,2007)**

SOLUTION:

অংকটায় একটু ভুল notation ব্যবহার করা হয়েছে--এখানে $\limsup x_n$-কে লিখেছে $\lim_{n\to\infty}(\sup x_n)$, যার কোনো মানে হয় না, কারণ x_n হল একটা সংখ্যামাত্র, set নয়, তাই $\sup x_n$-এর অর্থ হয় না। একইরকম ভুল রয়েছে $\liminf$-এর বেলাতেও।

যাই হোক, এটা একটা iff-ওয়ালা অংক, সুতরাং দুভাগে করতে হবে, একভাগে "if" আর অন্য ভাগে "only if"।

> Define $T_n = \{x_k : k \geq n\}$.

যেমন Fig 15(a)-তে কালো কালো ডট্ দিয়ে T_4 দেখিয়েছি।
প্রথমে "if part"-টা করি। কি থেকে কি দেখাতে হবে লিখে নিই স্পষ্ট করে--

> If part:
>
> Given:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(\sup T_n) = l = \lim_{n\to\infty}(\inf T_n).$$
>
> To show: $x_n \to l$, i.e,
>
> $$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad x_n \in N(l,\epsilon).$$

যেহেতু গোড়াতেই "$\forall \epsilon > 0$" আছে, তাই--

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

Fig 15(b) দ্যাখো। মাঝের মোটা লাইনটা হল l. তার দুপাশে ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনদুটো দিয়ে একটা neighbourhood নিয়েছি $N(l, \epsilon)$. তারপর ওৎ পেতে বসে আছি কখন point-গুলো লাফাতে লাফাতে এসে এর মধ্যে ঢুকে পড়ে।
যেহেতু $\sup T_n \to l$, সুতরাং শিগ্গিরই $\sup T_n$-গুলো আমাদের ফাঁদে পা দিতে বাধ্য--

$\because \lim_{n\to\infty}(\sup T_n) = l$,

$$\therefore \exists M_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M_1 \quad \sup T_n \in N(l, \epsilon).$$

এই M_1-টা হল আমাদের একটা শিকার। ওদিকে $\inf T_n$-রাও l-এর দিকে ছুটে আসছে, তাই--

Similarly,

$$\exists M_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M_2 \quad \inf T_n \in N(l, \epsilon).$$

এবার দুটোর মধ্যে বড়টা নিই--

$\boxed{\exists M}$ Choose $M = \max\{M_1, M_2\}$.

তার মানে T_M-এর sup এবং inf দুটোই আমাদের ফাঁদের মধ্যে রয়েছে, কিন্তু এরাই তো বস্তুতঃ T_M-এর দুই প্রান্ত। এরাই যদি $N(l, \epsilon)$-এর মধ্যে থাকে তবে তো পুরো T_M-টাই $N(l, \epsilon)$-এর মধ্যে থাকতে বাধ্য! যেমন Fig 15(b)-তে সবগুলো কালো বিন্দুই রয়েছে ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনদুটোর মাঝখানে।

এবার "only if part"-এর পালা। লিখে নিই এবার কি থেকে কি দেখাতে হবে--

Only if part:

Given: $x_n \to l$.

To show:

$$\lim_n(\sup T_n) = l = \lim_n(\inf T_n),$$

i.e.,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad \sup T_n, \inf T_n \in N(l, \epsilon).$$

শুরুটা যথারীতি--

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

আবার Fig 15(b) দ্যাখো। খালি এবার একটা ছোট্টো প্যাঁচ আছে।

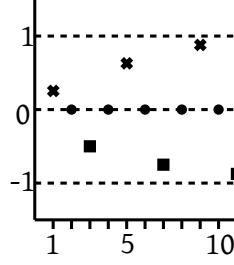



Fig 16

Then

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad x_n \in N(l, \epsilon/2).$$

$\boxed{\exists M}$ Choose this M.

প্যাঁচটা কি বুঝলে? এবার কিন্তু আমরা $\epsilon/2$ নিয়ে কাজ করছি। কেন খালি ϵ নিয়ে কাজ চলবে না, সেটা এক্ষুণি দেখবে। যাই হোক, M-এর পর থেকে সব বিন্দুই আমাদের খপ্পরে চলে এসেছে। তার মানে পুরো T_M-ই $N(l, \epsilon/2)$-এর মধ্যে। কিন্তু মনে রেখো যে আমাদের উদ্দেশ্য তো খালি T_M-কে ধরা নয়, আমাদের দরকার $\sup T_M$ আর $\inf T_M$-কে। $T_M \subseteq N(0, \epsilon/2)$ মানেই কি এই যে $\sup T_M$ আর $\inf T_M$-ও $N(l, \epsilon/2)$-এর মধ্যে থাকবে? না, যেমন $(0,1)$-এর sup আর inf হল 1 আর 0, এরা কেউই $(0,1)$-এর মধ্যে নেই। একেবারে গায় লেগে আছে, কিন্তু ভিতরে নেই। ঠিক এই সমস্যাটা আঁচ করেই আমরা ϵ-এর জায়গায় $\epsilon/2$ নিয়েছিলাম। কারণ $\sup T_M$ আর $\sup T_M$ যদি $N(l, \epsilon/2)$-এর মধ্যে নাও থাকে, অবশ্যই $N(l, \epsilon)$-এর মধ্যে থাকতে বাধ্য!

So $T_M \subseteq N(l, \epsilon/2)$.

$\boxed{\forall n}$ Take any $n \geq M$.

Then $T_n \subseteq T_N \subseteq N(1, \epsilon/2)$.

$$\therefore \sup T_n, \inf T_n \in N(l, \epsilon),$$

as required.

■

Exercise 20: Find upper limit and lower limit of the sequence $\{a_n\}_n$, where

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sin \frac{n\pi}{2},$$

and examine whether the sequence is convergent.[3] **(2007)**

HINT:

আমরা তো $\liminf a_n$ আর $\limsup a_n$ **??** নম্বর অংকেই বের করেছিলাম। Fig 16-তে গ্রাফটা দেখিয়েছি। দেখাই যাচ্ছে যে এখানে সব term মোটেই একই দিকে যাচ্ছে না, কেউ যাচ্ছে -1-এ কেউ 1-এ আবার কেউ 0-তে। সুতরাং convergence-এর প্রশ্নই নেই। এই কথাটাকেই আমরা $\limsup, \liminf$ ব্যবহার করে লিখব।

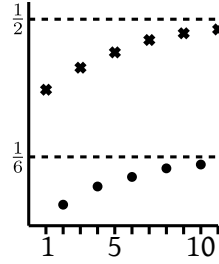



Fig 17

Since $\liminf a_n = -1 \neq 1 = \limsup a_n$, so the sequence does not converge.

■

Example 21: Let $\{x_n\}_n$ be a sequence of real numbers defined by $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_{2n} = \frac{1}{3}x_{2n-1}$ and $x_{2n+1} = \frac{1}{3} + x_{2n}$ for $n = 1, 2, 3...$ Find $\liminf_{n\to\infty} x_n$ and $\limsup_{n\to\infty} x_n$. Also examine the convergence of the sequence.[4] **(2006)**

SOLUTION: এই অংকটাকে দেখে ঠিক চট্ করে বোঝা যাচ্ছে না যে কোন দিক দিয়ে শুরু করব। এরকম অবস্থায় sequence-টার প্রথম কয়েকটা term বার করে দেখলে অংকটা সম্বন্ধে একটা ধারণা জন্মায়। এখানে

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}, \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}x_1 = \tfrac{1}{3^2} \\ x_3 &= \tfrac{1}{3} + x_2 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2} \\ x_4 &= \tfrac{1}{3}x_3 = \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{3^3} \\ x_5 &= \tfrac{1}{3} + x_4 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{3^3}. \end{aligned}$$

প্যাটার্ণটা লক্ষ কর--প্রতিটি odd term-এর চেহারা হল

$$x_{2n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}.$$

এইটা বেশ একটা চমৎকার geometric series, সুতরাং এর limit বার করতে পারব। তাহলে প্রথমে প্যাটার্ণটাকে প্রমাণ করে শুরু করি। এর জন্য আমরা induction লাগাব।

Shall show that $\forall n \in \mathbb{N}$

$$x_{2n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}. \qquad (**)$$

Basis For $n = 1$, given.

Hyp Assume for n.

Step Shall show for $n+1$.

$$\begin{aligned} x_{2(n+1)-1} &= x_{2n+1} \\ &= \tfrac{1}{3}+x_{2n} \\ &= \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}x_{2n-1} = \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{3^n}\right] \\ &= \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3^2}+\cdots+\tfrac{1}{3^{n+1}}, \end{aligned}$$

completing the induction proof of (**).

সুতরাং প্যাটার্ণের প্রমাণটা শেষ হল। এবার limit নেওয়ার পালা।

Thus,

$$x_{2n-1} \to \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{1}{2}.$$

So

$$x_{2n} = x_{2n+1} - \frac{1}{3} \to \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

সুতরাং sequence-টা দেখতে Fig 17-এর মত। দেখাই যাচ্ছে যে এর ঠিক দুটো subsequential limit, $\frac{1}{2}$ আর $\frac{1}{6}$.

Since every natural number is either of the form $2n$ or $2n-1$, hence the sequence has exactly two subsequential limits, $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{6}$.

So the upper limit is $\frac{1}{2}$, the maximum subsequential limit, and the lower limit is $\frac{1}{6}$, the minimum subsequential limit.

Since the upper limit is different from the lower limit, the sequence does not converge, it oscillates.

■

3.2 Properties

এবার আমরা $\liminf$ আর $\limsup$-এর কিছু ধর্ম শিখব। যেহেতু $\liminf, \limsup$ হল আসলে $\inf A$ আর $\sup A$, যেখানে A হল যাবতীয় subsequential limit-এর set, তাই এই ধর্মগুলো সবই আসলে inf আর sup-এর বিভিন্ন ধর্ম থেকে পাওয়া।

Example 22: এটা ?? পাতার ?? নম্বর অংকটার দ্বিতীয় অংশ। সেখানে একটা bounded sequence $\{x_n\}_n$-এর $\limsup = \mu$ আর $\liminf = \lambda$ দেওয়া ছিল। এবারের অংক হল-- Show that $\lambda \le \mu$.
(2002)

SOLUTION: আমরা এখানে দুটো definition-এর যেটা খুশী ব্যবহার করতে পারি। যদি প্রথম definition-টা ব্যবহার করি তবে প্রমাণটা একটু বেশী সহজ--

To show: $\lambda \le \mu$.

We know that for any nonempty bounded set A

$$\inf A \le \sup A.$$

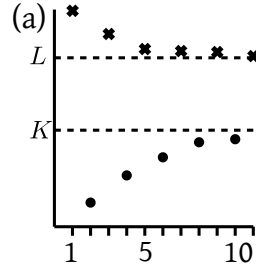



Fig 18

Let $A =$ the set of subsequential limits of $\{x_n\}_n$.

$$\lambda = \inf A \leq \sup A = \mu,$$

as required.

বিকল্প পদ্ধতি

যদি দ্বিতীয় definition-টা লাগাতাম তবেও চলত--

To show: $\lambda \leq \mu$.
We know that for any nonempty bounded set A

$$\inf A \leq \sup A.$$

For each $n \in \mathbb{N}$, taking $A = \{x_k : k \geq n\}$, we have

$$\inf\{x_k : k \geq n\} \leq \sup\{x_k : k \geq n\}.$$

Taking limit as $n \to \infty$, $\lambda \leq \mu$, as required.

■

Example 23: For any sequence $\{a_n\}_n$ of real numbers, prove that

$$\liminf_n (-a_n) = -\limsup_n a_n.$$

(Assume $\limsup_n a_n$ is finite.)[3] **(2003)**
SOLUTION:
মনে আছে হয়তো যে আমরা দেখেছিলাম যে B যদি কোনো bounded, nonempty set হয়, তবে $\inf(-B) = -\sup B$ হয়। সেই কথাটাই এখানে ব্যবহার করতে হবে।

প্রথমে একটা উদাহরণ দেখে নিই। ধর $\{a_n\}_n$ sequence-টা হল Fig 18(a)-এর মত। তবে $\limsup a_n$ হল L. যদি Fig 18(a)-কে উপর-নীচে উলটে দিই তবে পাব $\{-a_n\}_n$-এর গ্রাফ (Fig 18(b)). লক্ষ কর যে এখানে $\liminf(-a_n)$ হল $-L$. তার মানে আগে যেটা ছিল $\limsup$ ওলটানোর পর সেটারই negative-টা হল $\liminf$. এটাই এই অংকে দেখাতে দিয়েছে।

Define $T_n = \{a_k : k \geq n\}$.
Then

$$\begin{aligned}
\liminf_n(-a_n) &= \lim_n \big[\inf(-T_n)\big] \\
&= \lim_n \big[-\sup T_n\big] \quad \big[\because \text{ for any bounded set } A \neq \phi,\ \inf(-A) = -\sup(A)\big] \\
&= -\lim_n \big[\sup T_n\big] \\
&= -\limsup_n a_n,
\end{aligned}$$

as required.

■

আমরা এই অংকে ব্যবহার করেছিলাম যে $\sup(A) = \ell$ হলে $\inf(-A) = -\ell$ হবে। এরকম আরেকটা তথ্য হল--ধরো $\sup(A) = \ell$ আর $k > 0$ কোনো সংখ্যা। যদি A-র প্রতিটা element-কে k দিয়ে গুণ করে দিই তবে যে নতুন set-টা পাব তাকে যদি $k \cdot A$ বলি, তবে $\sup(k \cdot A) = k\ell$ হবে। সন্দেহ থাকলে চট্ করে দুলাইনে প্রমাণ করে নাও। এই তথ্যটা ব্যবহার করলেই নীচের অংকটা অনায়াসে হবে।

Exercise 21: Prove that if $\overline{\lim} x_n = \ell$ then for any $k > 0$, $\overline{\lim}(k \cdot x_n) = k \cdot \ell$.[2] **(2013.4d)** ■

Example 24: Let $\{s_n\}_n$ and $\{t_n\}_n$ be two bounded sequences of real numbers. Show that

$$\liminf_{n\to\infty}(s_n + t_n) \geq \liminf_{n\to\infty} s_n + \liminf_{n\to\infty} t_n.$$

[4] **(1997)**

SOLUTION: প্রথমে যা যা উপকরণ লাগবে তাদের নাম দিয়ে নিই-

Let

$$\begin{aligned}
u_n &= s_n + t_n, \\
S_n &= \{s_k : k \geq n\}, \\
T_n &= \{t_k : k \geq n\}, \\
U_n &= \{u_k : k \geq n\}.
\end{aligned}$$

এবার লিখি কি দেখাতে হবে। এখানে মনে রেখো যে $\liminf_{n\to\infty} s_n = \lim_n(\inf S_n)$

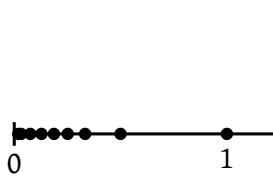
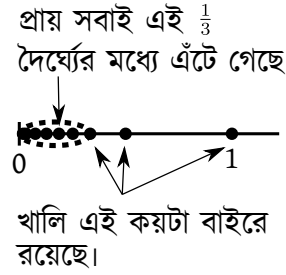
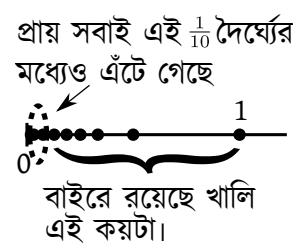



Fig 19 **Fig 20** **Fig 21**

To show

$$\lim_{n\to\infty} \inf U_n \geq \lim_{n\to\infty} \inf S_n + \lim_{n\to\infty} \inf T_n.$$

It is enough to show that

$$\inf U_n \geq \inf S_n + \inf T_n,$$

i.e., $\inf S_n + \inf T_n$ is a lower bound for U_n.

এটা দেখালেই কেন হবে বল তো!

Pick any $u_k \in U_n$.
Then $u_k = s_k + t_k$, where $s_k \in S_n$ and $t_k \in T_n$.
$\therefore s_k \geq \inf S_n$ and $t_k \geq \inf T_n$.

$$\therefore u_k = s_k + t_k \geq \inf S_n + \inf T_n.$$

So $\inf S_n + \inf T_n$ is indeed a lower bound for U_n, completing the proof.

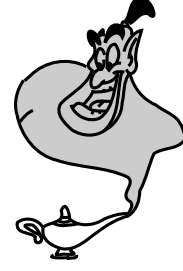
■

Exercise 22: If $\{u_n\}_n$ and $\{v_n\}_n$ are bounded sequences, prove that

$$\overline{\lim} u_n + \overline{\lim} v_n \geq \overline{\lim}(u_n + v_n).$$

[2] **(2011.4c)**
HINT:
এই অংকটা একেবারেই আগের মত, খালি $\lim\inf$-এর জায়গায় $\lim\sup$, তাই আর নতুন করে করলাম না। ■

DAY 4
Cauchy sequences

আরব্যরজনীর গল্পে একরকম জিনের কথা আছে যারা আকারে বিশাল, মেঘের মত পুরো আকাশ ছেয়ে চারিদিক অন্ধকার করে ফেলে অথচ আবার ছোটো হতে হতে একটা কলসী কিংবা নস্যির কৌটোর মধ্যে দিব্যি এঁটে যেতে পারে। কোনো কোনো sequence-এরও এইরকম স্বভাব। এমনিতে যে কোনো sequence-এই infinitely many term থাকে, কিন্তু এইসব sequence-দের ক্ষেত্রে term-গুলো পরস্পরের এতই কাছাকাছি যে অতি ক্ষুদ্র জায়গার মধ্যেই প্রায় সবগুলো term-ই এঁটে যায়। "প্রায় সবগুলো" বলার কারণ এই যে অনেক সময়ে গোড়ার দিকের finitely many term বাইরে থেকে যায়, বাকী infinitely many term ঢুকে যায় ছোটো জায়গাটুকুর মধ্যে। এই রকম sequence -দের বলে **Cauchy sequence.**

Example 25: ধর এই sequence-টা--$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$ Fig 19 দেখলেই বুঝবে যে term-গুলো কি রকম 0-র কাছে ভীড় করে আছে। তুমি আমাকে যত ছোটো খুশী একটা $\epsilon > 0$ দাও, আমি প্রায় সবগুলো term-কেই ϵ সাইজের একটা কৌটোতে ভরে ফেলতে পারব। যেমন যদি $\epsilon = \frac{1}{3}$ দাও, তবে প্রথম তিনটে term বাদে বাকী সবাই $(0, \frac{1}{3})$-র মধ্যে ধরে যাবে (Fig 20). যদি $\epsilon = \frac{1}{10}$ দাও, তাহলেও প্রায় সবাইকেই আমি $(0, \frac{1}{10})$-এর মধ্যে পেয়ে যাব, খালি প্রথম দশটা বাইরে থেকে যাবে (Fig 21).
একই কাজ করা যাবে যে কোনো $\epsilon > 0$-এর জন্যই। তাই এই sequence-টা একটা Cauchy sequence. ■

এবার একটা এমন sequence-এর উদাহরণ দেখি যেটা Cauchy sequence নয়।

Example 26: যদি $1, 2, 3, 4, ...$ এই sequence-টা নিই, তবে তার term-গুলো এক এক করে বাড়তে বাড়তে সটান ∞-র দিকে চলেছে, সুতরাং কোনো কৌটোর মধ্যেই ওদের বেঁধে ফেলা সম্ভব নয়। তাই এই sequence-টা মোটেই Cauchy sequence নয়। ■

এবার Cauchy sequence-এর সংজ্ঞাটাকে অংকের ভাষায় লেখার চেষ্টা করি।
ধর $\{a_n\}_n$ একটা sequence. একে আমরা একটা Cauchy sequence বলব যদি--

> যতটুকু জায়গাই দাও না কেন, গোড়ার কিছু finite সংখ্যক term বাদে বাকীরা তার মধ্যে এঁটে যাবে,

মানে

> $\forall \epsilon > 0$ গোড়ার কিছু finite সংখ্যক term বাদে বাকীরা ϵ পরিমাণ জায়গার মধ্যে এঁটে যাবে,

গোড়ার কতগুলো term বাদ দিতে হবে? ধরো $a_1, ..., a_{N-1}$ পর্যন্ত, যেখানে $N \in \mathbb{N}$ কোনো একটা সংখ্যা। তাহলে দাঁড়ালো--

> $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ যাতে $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, ...$ ইত্যাদিরা সবাই ϵ পরিমাণ জায়গার মধ্যে এঁটে যাবে।

এখানে ϵ পরিমাণ জায়গার মধ্যে এঁটে যাওয়া মানে এই যে, যদি তুমি যে কোনো দুটো term নাও, তবে তাদের মধ্যে দূরত্ব ϵ-এর চেয়ে কম হবে। এই কথাটাই গুছিয়ে লিখব নীচের প্রশ্নটার উত্তরে।

Example 27: Define a Cauchy sequence of real numbers. Using the definition, show that $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_n$ is a Cauchy sequence.[1+2] **(2008,2001)**
SOLUTION:

DEFINITION: Cauchy sequence

A sequence $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ is called a <u>Cauchy sequence</u> if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq M \quad |a_m - a_n| < \epsilon.$$

এবার দ্বিতীয় অংশ--

Let $a_n = \frac{n}{n+1}$.

To show:

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |a_n - a_m| < \epsilon.$

Take any $\epsilon > 0$.

এই রকম যেকোনো অংকেই সাধারণতঃ মূল যে জিনিসটা কাজে লাগে সেটা হল $\frac{1}{n} \to 0$ (যেটা Archimedean property থেকে আসে)। সুতরাং a_n-টাকে একটু সাজিয়ে নিই যাতে $\frac{1}{n}$-এর সঙ্গে ওর সম্পর্কটা স্পষ্ট হয়--

We have

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

একটু রাফ্ করে নিই। লক্ষ কর যে, যদি যে কোনো $N \in \mathbb{N}$ আর যেকোনো $m, n \geq N$ নিই, তবে

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1}\right| \leq \left|\frac{1}{m+1}\right| + \left|\frac{1}{n+1}\right| \leq \frac{2}{N}.$$

এইটাকে ϵ-এর থেকে ছোটো রাখতে পারলেই হবে।

By Archimedean property, $\exists N \in \mathbb{N}$ such that $\frac{2}{N} < \epsilon$.

Choose this N.

Take any $m, n \geq N$.

Then

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1}\right| \leq \left|\frac{1}{m+1}\right| + \left|\frac{1}{n+1}\right| \leq \frac{2}{N} < \epsilon,$$

as required.

■

Exercise 23: When is a sequence said to be Cauchy? Give an example of a Cauchy sequence.[1+1] **(2010.4a)**

HINT:
উত্তর আগের অংকেই রয়েছে। ■

Example 28: Prove that every Cauchy sequence is bounded.[2] **(2006,2013)**

SOLUTION: যে sequence-এর প্রায় পুরোটাই যত খুশী ছোট্টো জায়গার মধ্যে এঁটে যায়, সে যে bounded হবে সে তো বোঝাই যায়। এই সহজ কথাটা প্রমাণ করব এইভাবে--প্রথমে একটা কৌটো নেব, এবং তার মধ্যে প্রায় পুরো sequence-টাকে পুরে ফেলব। কৌটোর বাইরে যে কয়টা term পড়ে থাকবে, তাদের সংখ্যা finite, সুতরাং bounded হবে। অতএব এই কৌটো আর bound মিলিয়ে পুরো sequence-টাই bounded হবে।

> Let $\{x_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ be Cauchy.
> So taking $\epsilon = 1$
> $$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |x_n - x_m| < 1.$$

অর্থাৎ আমরা $\epsilon = 1$ মাপের একটা কৌটোতে $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$ ইত্যাদি সবাইকে পুরে ফেলতে পেরেছি--

> So
> $$\forall n \geq N \quad x_n \in (x_N - 1, x_N + 1).$$

বাইরে পড়ে আছে বড়জোর $x_1, \ldots, x_{N-1}$. এবার এমন একটা bound M নেব যার মধ্যে এরাও থাকে আবার কৌটোটাও (মানে $(x_N - 1, x_N + 1)$) থাকে।

> Hence
> $$M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_N - 1|, |x_N + 1|\}$$
> is a bound for $\{x_n\}_n$, as required.

■

Example 29: Prove or disprove: every bounded sequence in $\mathbb{R}$ is a Cauchy sequence.[3] **(2003)**

SOLUTION:

> No, Every bounded sequence is not a Cauchy sequence.
> Counterexample: Consider $\{a_n\}_n$, where $a_n = (-1)^n$.
> Then $\{a_n\}_n \subseteq [-1, 1]$, and so is bounded.
> Shall show that $\{a_n\}_n$ is not Cauchy,
> *i.e.*,
> $$\exists \epsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists m, n \geq N \quad |a_m - a_n| \geq \epsilon.$$

যেহেতু a_n-গুলো একবার -1 হচ্ছে আর একবার 1 হচ্ছে, তাই ওদেরকে কোনো ভাবেই $1 - (-1) = 2$-এর চেয়ে ছোটো কৌটোয় ঢোকানো যাবে না। তাই 2-এর চেয়ে ছোটো যে কোনো ϵ-এই কাজ চলবে। ধরো $\epsilon = 1$ নিলাম--

$\exists\epsilon$ Choose $\epsilon = 1$.

$\forall N$ Take any $N \in \mathbb{N}$.

$\exists m, n$ Choose any even $m \geq N$ and odd $n \geq N$.

Then

$$|a_m - a_n| = |1 - (-1)| = 2 \geq 1,$$

as required.

■

Exercise 24: Let $\{a_n\}_n$ be a real sequence such that for each $n \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Show that $\{a_n\}_n$ must be a Cauchy sequence. ■

4.1 Cauchy's general principle

আমরা ষষ্ঠ অধ্যায়ে sequence-দের নানারকম শ্রেণীবিভাগ শিখেছিলাম। এখন তাদের সঙ্গে আরো একটা নতুন শ্রেণীবিভাগ যুক্ত হল--Cauchy sequence বনাম যারা Cauchy sequence নয়। এই নতুন শ্রেণীবিভাগের সঙ্গে পুরণো শ্রেণীবিভাগের একটা চমৎকার সম্পর্ক আছে, তাকে বলে Cauchy's general principle of convergence. সেটা এই যে, যদি $\{a_n\}_n$ কোনো real number-এর sequence হয়, তবে তার পক্ষে Cauchy হওয়া আর convergent হওয়া সমার্থক। অর্থাৎ Cauchy sequence মাত্রেই convergent, এবং বিপরীতপক্ষে convergent sequence মাত্রেই Cauchy!

> **Cauchy's gen. principle of convergence**
> A real sequence is convergent if and only if it is a Cauchy sequence.

এইবার এই কথাটা দুইধাপে প্রমাণ করব। প্রথম ধাপে দেখাব যে, convergent হলে Cauchy হয়।

Example 30: Prove that every convergent sequence is Cauchy.

SOLUTION: যদি convergent হয়, তবে term-গুলো সব গিয়ে limit-এর কাছে ভীড় করে। সুতরাং যে কোনো $\epsilon > 0$ নিলেই দেখব যে প্রায় সব term-ই limit-এর থেকে ϵ দূরত্বের মধ্যে রয়েছে। সেখান থেকে Cauchy প্রমাণ করা মোটেই কঠিন নয়।

Let $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ be any convergent sequence.

Shall show that $\{a_n\}_n$ is a Cauchy sequence,

i.e.,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |a_m - a_n| < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Let $a_n \to L$.

Then

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |a_n - L| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

লক্ষ কর আমরা $\frac{\epsilon}{2}$ নিয়েছি। কারণটা এক্ষুণি দেখবে।

$\boxed{\exists N}$ Choose this N.

$\boxed{\forall m, n}$ Take any $m, n \geq N$.

Then, by triangle inequality,

$$|a_m - a_n| = |(a_m - L) - (a_n - L)| \leq |a_m - L| + |a_n - L| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

as required.

■

উল্টোদিকটা দেখানো একটু বেশী কঠিন।

Example 31: Prove that every Cauchy sequence is convergent.[3] **(2011.7b)**

SOLUTION:

Let $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ be a Cauchy sequence. Shall show that $\{a_n\}_n$ converges in $\mathbb{R}$,

i.e.,

$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - L| < \epsilon.$

প্রথম কাজ হল একটা যুৎসই limit L পাওয়া। যদি দেওয়া থাকত যে $\{a_n\}_n$ converge করে তবে তার limit সহজেই বার করা যেত, কিন্তু আমাদের মোটেই বলে দেয় নি যে, $\{a_n\}_n$ converge করে। ওটা দেখানোই আমাদের উদ্দেশ্য। তাই আমাদের কাজটা একটু অদ্ভুত, আগে একটা limit খাড়া করে তার পরে দেখানো যে sequence-টা সত্যিই সেটাতে converge করে। এ যেন অনেকটা কাকে ফাঁসী দেওয়া হবে সেটা আগে ঠিক করে, তার পরে বিচার শুরু করার মতো।
আমরা তাই প্রথমে এমন একটা subsequence নেব যেটা converge করে বলে জানা আছে (Bolzano-Weierstrass theorem থেকে এরকম subsequence পাব)। তারপর তার limit-টাকে নেব L হিসেবে। কারণ যদি পুরো sequence-টা কোথাও converge করে তবে এই subsequence-টাও সেখানেই converge করবে।

$\because$ Cauchy sequences are bounded,

$\therefore \{a_n\}_n$ is bounded.

$\therefore$ By Bolzano-Weierstrass theorem for sequences, $\{a_n\}_n$ has a convergent subsequence $\{a_{n_k}\}_k$, say.

$\boxed{\exists L}$ Choose $L = \lim_{k \to \infty} a_{n_k}$.

Subsequence-টা তো L-এ converge করেই। এবার দেখাতে হবে যে, পুরো sequence-টাও করে। যেহেতু আমাদের sequence-টা Cauchy, তাই term-গুলো খুব ঠাসাঠাসি করে আছে (প্রথম দিকের finitely many term বাদে)। সুতরাং প্রায় সবগুলো term-ই subsequence-টার খুব কাছাকাছি রয়েছে। এ থেকে সিদ্ধান্ত করব যে পুরো sequence-টাই L-এ converge করতে বাধ্য!

∀ϵ Take any $\epsilon > 0$.

$\because a_{n_k} \to L$,

$$\therefore \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad |a_{n_k} - L| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Also, $\because \{a_n\}_n$ is Cauchy,

$$\therefore \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N_1 \quad |a_m - a_n| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

$\because \{a_{n_k}\}_k$ is a subsequence, $\therefore n_k \to \infty$.

$$\therefore \exists K_1 \in \mathbb{N} \quad n_{K_1} \geq \max\{N_1, n_K\}.$$

∃N Choose $N = n_{K_1}$.

খুব ভালো করে পড়ে দ্যাখো কি ভাবে N নির্বাচন করলাম। এর ফলে $|a_N - L| < \frac{\epsilon}{2}$ হবে। কারণ $n_{K_1} \geq n_K$ নিয়েছি। যেহেতু একটা subsequence কখনও পেছোতে পারে না, তাই $K_1 \geq K$ হতে বাধ্য। সুতরাং $|a_{n_{K_1}} - L| < \frac{\epsilon}{2}$ হবে, মানে $|a_N - L| < \frac{\epsilon}{2}$ হবে। এটা এক্ষুণি কাজে লাগবে। বাকি অংশ সহজ।

∀n Take any $n \geq N$.

Then $|a_N - L| < \frac{\epsilon}{2}$ and $|a_n - a_N| < \frac{\epsilon}{2}$.

$$\begin{aligned} \therefore |a_n - L| &= |(a_n - a_N) + (a_N - L)| \\ &\leq |a_n - a_N| + |a_N - L| \quad \text{[triangle inequality]} \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

এবার কিছু প্রয়োগ দেখি।

Example 32: Use Cauchy's general principle of convergence that the sequence $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}_n$ is convergent.[3] **(2011.6c)**

SOLUTION: Sequence-টার চেহারা দেখেই আন্দাজ করছি যে কোথাও একটা Archimedean property লাগাতে হবে, তাই $\frac{1}{n}$-এর মত করে লিখে নিই--

Let $a_n = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$.

আমরা দেখাব যে $\{a_n\}_n$ হল Cauchy, এবং সুতরাং সিদ্ধান্ত করব যে sequence-টা convergent.

Shall show: $\{a_n\}_n$ is Cauchy,

i.e.,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |a_m - a_n| < \epsilon.$

Take any $\epsilon > 0$.

একটু রাফ্ করে নিই N নির্বাচনের জন্য। এখানে

$$|a_m - a_n| = |\tfrac{2}{m+1} - \tfrac{2}{n+1}| < \tfrac{4}{N},$$

যেহেতু $m, n \geq N$. তার মানে $\frac{4}{N}$-কে ϵ-এর থেকে ছোটো রাখতে পারলেই হবে।

By Archimedean property,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \frac{4}{N} < \epsilon.$$

Choose this N.

এরপরের গল্প সহজ--

Take any $m, n \geq N$.

Then

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |\tfrac{2}{m+1} - \tfrac{2}{n+1}| \\ &\leq 2(\tfrac{1}{N} + \tfrac{1}{N}) \quad [\because m, n \geq N] \\ &= \tfrac{4}{N} < \epsilon. \end{aligned}$$

So by Cauchy's general principle of convergence we see that $\{a_n\}_n$ converges, as required.

■

Example 33: Applying Cauchy's general principle of convergence show that the sequence $\{x_n\}_n$ where

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

is not convergent.[3] **(2004)**

SOLUTION:

Shall show: $\{x_n\}_n$ is not Cauchy,

i.e.,

$\exists \epsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists m, n \geq N \quad |x_m - x_n| \geq \epsilon.$

■

এইটা পেয়েছি Cauchy sequence-এর সংজ্ঞার negation নিয়ে।

$\exists\epsilon$ Choose $\epsilon = \frac{1}{2}$.

পুরো সমাধানটা পড়ে দ্যাখো, তারপর বুঝবে কেন আমরা $\epsilon = \frac{1}{2}$ নির্বাচন করেছি।

$\forall N$ Take any $N \in \mathbb{N}$.

$\exists m, n$ Choose $m = N$ and $n = 2N$.

Then

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N}}_{N \text{ times}} \quad [\because \text{each term} \geq \tfrac{1}{2N}] \\ &= \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

as required.

So the sequence $\{x_n\}_n$ is not Cauchy, and hence not convergent.

■

নীচের অংকটায় আর নতুন করে করার কিছুই নেই।

Exercise 25: Examine whether $\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right\}_n$ is a Cauchy sequence.[2] **(2012.4c)** ■

Example 34: Examine whether

$$\left\{1 + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \cdots + \tfrac{1}{n!}\right\}$$

is a Cauchy sequence.[3] **(2013.7c)**

SOLUTION: আমরা হায়ার সেকণ্ডারীর সময়ে শিখেছিলাম $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$. ওই শেষের ডট্ ডট্‌গুলোর মানে কি? ওর মানে হল এখানে একটা limit নেওয়ার ব্যাপার আছে। যদি $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ নিই, তবে $\{x_n\}_n$-এর limit-টাকেই e বলা হচ্ছে। কিন্তু তার আগে তো দেখানো উচিত যে $\{x_n\}_n$ আদৌ converge করে! হায়ার সেকণ্ডারীর সময়ে আমরা বাচ্চা ছিলাম, তখন এতসব নিয়ে মাথা ঘামাই নি, কিন্তু এবার ঘামাব। আমরা জানি যে একটা real sequence-এর পক্ষে convergent হওয়া আর Cauchy হওয়া সমার্থক। তাই এই অংকে পরীক্ষা করতে বলেছে $\{x_n\}_n$-টা একটা Cauchy sequence হয় কিনা। হবে যে সেটা হায়ার সেকণ্ডারীর স্মৃতি থেকেই বুঝতে পারছি, প্রশ্ন হল কি করে দেখাব।

Let $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

Shall show that $\{x_n\}_n$ is a Cauchy sequence, ie

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |x_n - x_m| < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এইবার একটু রাফ করে বুঝে নেওয়া যাক $|x_n - x_m|$-এর চেহারাটা কেমন। ধরো $m = 2$ আর $n = 4$ তবে

$$x_m = x_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$$
$$x_n = x_4 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}.$$

সুতরাং বিয়োগ করলে প্রথম অংশটা কেটে গিয়ে পড়ে থাকবে

$$|x_n - x_m| = \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}.$$

এখানে কোনো negative সংখ্যা নেই, তাই absolute value নেওয়াতে কিছু বদলায় নি। একই যুক্তিতে যেকোনো $m < n$-এর ক্ষেত্রেই

$$|x_n - x_m| = \frac{1}{(m+1)!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

আমাদের কাজ হল এটাকে $< \epsilon$ করা। এতগুলো দাঁত-বার-করা factorial-এর দৌরাত্মে ঠিক করে চিন্তা করাই কঠিন। একটু সহজ না করে নিলে চলছে না। আমরা জানি যে

$$k! = 2 \times \cdots \times k.$$

এটা $k-1$-খানা সংখ্যার গুণফল। সংখ্যাগুলো সবাই ≥ 2. সুতরাং $k! > 2^{k-1}$. তার মানে

$$\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

সুতরাং

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

এইবার ডানদিকের জিনিসটা অনেক ভদ্র হয়েছে--geometric $-$ $-$progression. আশা করি ভুলে যাও নি যে

$$r^m + r^{m+1} + \cdots + r^{n-1} = r^m \times \frac{1 - r^{n-m}}{1 - r}.$$

সুতরাং

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2^m} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{m-1}} \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}\right]$$

এটাকে $< \epsilon$ রাখতে পারলে হল। চৌকো ব্র্যাকেটের মধ্যে যেটা আছে সেটা দেখতে যতই কঠিন হোক, সব সময়েই 1-এর চেয়ে ছোটো। সুতরাং ওটা ঝামেলা করবে না। বাকি রইল $\frac{1}{2^{m-1}}$, সেটা অবশ্যই কমতে কমতে 0-র দিকে যাচ্ছে। ব্যস্ এবার তাহলে প্রমাণে ফিরতে পারি--

$\because \frac{1}{2^n} \to 0$ as $n \to \infty$,

$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2^{N-1}} < \epsilon$.

$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\forall m, n$ Choose any $m, n \geq N$.

এক্ষুণি যে রাফটা করলাম, সেটাকে গুছিয়ে লিখে দিলেই চলবে--

If $m=n$, then $|x_m - x_n| = 0 < \epsilon$, as required.
Otherwise, w.l.g., let $m<n$. Then

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \frac{1}{(m+1)!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leq \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad [\because k! \geq 2^{k-1}] \\ &\leq \frac{1}{2^m} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}\right] \\ &< \frac{1}{2^{m-1}} \\ &\leq \frac{1}{2^{N-1}} = \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

Example 35: Use Cauchy's criterion to show that $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ does not exist.[2] **(2010.6b)**

SOLUTION: Cauchy criterion হল Cauchy's general principle of convergence-এর আরেকটা নাম। কিন্তু সেটা তো sequence-এর limit-এর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য! আর এখানে তো function-এর limit দিয়েছে! তার মানে এখানে একটু ঘুরিয়ে নাক দেখতে বলেছে। প্রথমে sequential criterion of limit লাগিয়ে অংকটাকে sequence-এর limit-এর পরিণত করতে হবে, এবং তারপর সেই sequence-এ Cauchy criterion লাগাতে হবে।
তাহলে প্রথম কাজ হল এমন একটা sequence $\{x_n\}_n$ নেওয়া যাতে $x_n \to 0$ হয়, কিন্তু $\sin\frac{1}{x_n}$-এর limit না থাকে।

Let $x_n = \frac{2}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}$.
Let $y_n = \sin\frac{1}{x_n} = \sin\frac{n\pi}{2}$.

এবার দেখাব যে $\{y_n\}_n$ একটা Cauchy sequence নয়। তা থেকে Cauchy criterion দিয়ে বলতে পারব যে সেটা convergent হতে পারে না--

Then $\forall k \in \mathbb{N}$ $y_{2k} = 0$ and $y_{4k+1} = 1$.
So $\{y_n\}_n$ is not Cauchy, and hence by Cauchy criterion, is not convergent.
Hence, by sequential criterion of limit, the given limit does not exist.

■

এবার কয়েকটা অংক দেখি যেখানে Cauchy's general principle ব্যবহার করতে বলে দেয়নি, কিন্তু ব্যবহার করলে সুবিধা হয়। যেহেতু আমরা জানি যে, $\mathbb{R}$-এর মধ্যে Cauchy হওয়া আর convergent হওয়া সমার্থক, তাই Cauchy (বা Cauchy

নয়) প্রমাণ করতে দিলে আমরা convergent (বা convergent নয়) প্রমাণ করলেই চলবে। অনেক সময়েই Cauchy-এর চেয়ে convergence নিয়ে কাজ করা সহজতর।

Example 36: Define a Cauchy sequence of real numbers. Using your definition or otherwise, show that $\{2^n\}_n$ is not a Cauchy sequence.[1+2] **(2002)**

SOLUTION: Definition-টা আগেই দিয়েছি (?? নম্বর অংকে)। পরের অংশটার জন্য অবশ্য আমরা মোটেই definition-টা লাগাব না। কারণ Cauchy's general principle of convergence থেকে আমরা জানি যে একটা sequence-কে Cauchy নয় দেখানোর জন্য সেটা convergent নয় দেখানোই যথেষ্ট। আমাদের sequence-টা যে convergent নয় সেটা বোঝা কঠিন নয়।

Clearly, $2^n \to \infty$ as $n \to \infty$.

কিন্তু নেহাত যদি কেউ এ বিষয়ে সন্দেহপ্রকাশ করে তাই ছোট্টো করে একটা প্রমাণ লিখে দেওয়া ভালো--

[[Because:

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= {}^nC_0 + {}^nC_1 + \cdots + {}^nC_n \\ &\geq 1 + n \to \infty. \end{aligned}$$

]]

So $\{2^n\}_n$ is not a convergent sequence.

Since, by Cauchy's general principle, a real sequence is convergent iff it is a Cauchy sequence, we see that $\{2^n\}_n$ is not a Cauchy sequence.

■

Exercise 26: একই অংক সরাসরি definition ব্যবহার করে কর তো। তার জন্য দেখাতে হবে

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists m, n \geq N \quad \left|2^m - 2^n\right| \geq \epsilon.$$

এইটা হল Cauchy sequence-এর সংজ্ঞার negation. এখানে তিনটে $\exists$ আছে, তার মানে তোমাকে একটা ϵ এবং একটা m, n নির্বাচন করতে হবে। কি করে করবে? ■

Example 37: Correct or justify:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k^2}$$

is a Cauchy sequence in $\mathbb{R}$.[2] **(2009)**

SOLUTION: এখানে আমরা একটা তথ্য ব্যবহার করব--

We know that if

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},$$

then $\{y_n\}_n$ is a convergent sequence, and hence a Cauchy sequence.

তার মানে $\frac{1}{k^2}$-গুলোকে পরপর যোগ করে গেলে যোগফলগুলো খুব গাদাগাদি করে থাকে। এবার যদি $\frac{\sin k}{k^2}$-দের যোগ করি তবে তো আরও গাদাগাদি হবে, কারণ $|\sin k| \leq 1$, তাই term-গুলো আরও কুঁকড়ে আসবে। সুতরাং $\{x_n\}_n$-ও একটা Cauchy sequence হবে।

Shall show that $\{x_n\}_n$ is a Cauchy sequence, i.e,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |x_m - x_n| < \epsilon.$

Take any $\epsilon > 0$.

$\because \{y_n\}_n$ is a Cauchy sequence,

$$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |y_m - y_n| < \epsilon.$$

$\exists N$ Choose this N.

Take any $m, n \geq N$, say with $m \leq n$.

এইবার সেই কুঁকড়ে যাওয়ার ব্যাপারটা--

Then

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin k}{k^2} \right| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \left| \frac{\sin k}{k^2} \right| \quad \left[\text{by triangle inequality.} \right] \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \left| \frac{1}{k^2} \right| \quad [\because |\sin k| \leq 1.] \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad [\because k^2 > 0.] \\ &= |y_n - y_m| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Hence $\{x_n\}_n$ is a Cauchy sequence, as required.

■

Exercise 27: Prove that $\{x_n\}_n$ converges where $x_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\cos^2(k)$. ■

Exercise 28: For each of the following $A \subseteq \mathbb{R}$ give an example of a Cauchy sequence in A that does not converge in A.
(1) $A = (0,1)$ **(2)** $A = \mathbb{Q}^c$ **(3)** $A = [0,1]$
■

DAY 5
কিছু গুরুত্বপূর্ণ sequence

ধরো নতুন কোনো জায়গায় বেড়াতে গেছো। একটা পথ দিয়ে খানিক দূর গিয়ে একটা উল্লেখযোগ্য কিছু দেখলে। পরের দিন আবার অন্য একটা পথ দিয়ে ঘুরতে ঘুরতে হঠাৎ কি করে জানি সেই গতকালের জায়গাটাতেই পৌঁছে গেলে। তখন ভারী মজা লাগে, কি করে এমন হল ভাবতে গিয়ে সেই জায়গার ভূগোলটা নিজের কাছে আরেকটু স্পষ্ট হয়।
অংকের জগতে e, π ইত্যাদি সংখ্যাগুলো নিয়ে এরকম ব্যাপার হামেশাই ঘটে থাকে। যেমন ধরো নীচের theorem-টা--

THEOREM

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

এটা প্রমাণ করা মোটেই কঠিন নয়, কঠিন হল এই limit-টা কি করে $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots$-এর সঙ্গে সমান হতে পারছে সেটা হজম করাটা। আমরা সেইটা খালি ধরিয়ে দেব, বিস্তারিত প্রমাণে যাব না। হায়ার সেকণ্ডারীর সময়ে binomial theorem করেছিলে, মনে আছে। সেটা থেকে পাই--

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + {}^nC_1\frac{1}{n} + {}^nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + {}^nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

লক্ষ কর এখানে term-গুলো হল ${}^nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k$-এর মত দেখতে। এখন

$${}^nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{k!}\times\left[\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\right].$$

এবার n যদি খুব বড় হয় তবে চৌকো ব্র্যাকেটের মধ্যেকার k-খানা জিনিসই 1-এর কাছে চলে যাবে। সুতরাং পুরো জিনিসটা ক্রমশঃই $\frac{1}{k!}$-এর সমান হয়ে উঠবে। এবার অনুভব করতে পারছ কেন limit-টা e হওয়া স্বাভাবিক। এই অনুভবেই অবশ্য প্রমাণটা হয়ে যায় না। কিন্তু প্রমাণের খুঁটিনাটিতে আপাততঃ যাচ্ছি না।

Example 38: Prove that

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \sqrt[3]{e}.$$

[2] **(2012.3c)**
SOLUTION:

> Let $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
>
> Then from standard result, $\{a_n\}$ converges to e.
>
> So the subsequence $\{a_{3n}\}$ also converges to e.
>
> Now $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = \sqrt[3]{x}$is a continuous function, and so $f(a_{3n}) \to f(e)$.
> Thus
> $$\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}} = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n \to \sqrt[3]{e},$$
> as required.

■

এই অংকটা খুব সহজে হয়ে গেল কারণ 3 একটা positive integer ছিল। তাই subsequence পেয়ে গেলাম। কিন্তু যদি যে কোনো $a \in \mathbb{R}$ দিত (যেমন ধরো $a = \sqrt{2}$) তবেও কিন্তু বলা যেত যে--

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \to e^a.$$

এবার অবশ্য প্রমাণটা আর subsequence দিয়ে হবে না। কিন্তু binomial theorem-এর কায়দাটা এখানেও খাটবে। চিন্তা করে দেখতে পারো কি করে হবে।
ধরো তোমাকে বললাম $\sqrt[n]{n!}/n$-এর limit বার করতে, কিংবা ধরো এই limit-টা--

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\{(n+1)(n+2)\cdots(2n)\}^{1/n}}{n}.$$

এদের দেখেই কেমন যেন হাত-পা ঠাণ্ডা হয়ে আসে, বিশেষতঃ ওই n-th root-গুলো থাকায়। এরকম অংক করার নানারকম কৌশল হয়, কোনোটা অল্প কয়েকটা ক্ষেত্রেই খালি কাজ করে, কোনোটা অনেক বেশী general, বিভিন্ন জায়গাতে কাজ আসে। আমরা এরকম একটা কৌশল এবার শিখব, যেটা এই বইয়ের দ্বিতীয় খণ্ডে infinite series শেখার সময়েও কাজে দেবে। কৌশলটার আরেকটা সুবিধা হল সহজ বুদ্ধিতেই বোঝা যায়। কৌশলটা এইরকম--

> ধরো তোমাকে দেখতে বলল $\sqrt[n]{a_n}$-এর limit আছে কিনা, এবং থাকলে কত। এখানে আমরা n-th root নিয়ে কাজ করছি, তাই $a_n > 0$ হতে হবে ($a_n = 0$-ও হতে পারে, কিন্তু সেটা নিতান্তই সহজ)। এর জন্য তুমি প্রথমে $\frac{a_{n+1}}{a_n}$-এর limit আছে কিনা দ্যাখো। যদি এই limit-টা হয় $\ell \in \mathbb{R}$ তবে $\sqrt[n]{a_n}$-এর limit-ও ℓ হতে বাধ্য!

প্রথমে ব্যাপারটা গুছিয়ে লিখে নিই--

THEOREM

Let $\{a_n\}_n$ be a sequence of positive terms. If $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$ then $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$.

প্রমাণটা একটু পরে করব। আগে সহজ বুদ্ধিতে বুঝে নিই যে এমনটা হওয়া কেন স্বাভাবিক। যদি $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$ হয়, তার মানে n যথেষ্ট বড় হলে

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \ell.$$

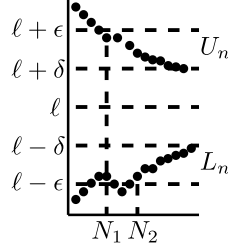



Fig 22

ফলে n যথেষ্ট বড় হলে $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ এরা মোটামুটিভাবে একটা GP-এর মত হবে, যার common ratio হল ℓ. অর্থাৎ প্রতি ধাপে ℓ করে গুণ হতে হতে এগোচ্ছে। তার মানে মোটামুটি ভাবে a_n হবে ℓ^n জাতীয় কিছু। আরো কিছু constant-টনস্ট্যান্ট থাকবে, আমি খালি মূল চেহারাটার কথা বলছি। সুতরাং $\sqrt[n]{a_n}$ থাকবে $\sqrt[n]{\ell^n} = \ell$-এর কাছাকাছি। এই যুক্তিটাকেই একটু পালিশ করলে প্রমাণ হবে $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$. প্রমাণের আগে আমরা একটা প্রয়োগ দেখে নিই।

Example 39: $\lim_n \sqrt[n]{n!}/n = ?$

SOLUTION: এখানে $a_n = n!/n^n$ নিই। তাহলে

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{-n} \to e^{-1}.$$

সুতরাং অমনি বলে দিতে পারি যে $\lim_n \sqrt[n]{n!}/n = e^{-1}$. ■

এবার তবে প্রমাণটা কি করে করা যায় দেখি--

> **Proof of the theorem:**
>
> Case 1: $\ell > 0$:
>
> To show
>
> ◎ $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \sqrt[n]{a_n} \in N(\ell, \epsilon)$.
>
> $\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

বারবার $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ নিয়ে কাজ করতে হবে, তাই একটা ছোটো নাম দিয়ে নিই--

> Let $r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

বলেছে যে r_n-গুলো ক্রমশঃই $\ell > 0$-এর কাছে যাচ্ছে। সুতরাং আমরা একটা মোটামুটি G.P. পেতে চলেছি যার common ratio-টা ℓ. কিন্তু একেবারে ℓ-এর সমান তো নাও হতে পারে, ℓ-এর ধারে কাছে থাকবে। সুতরাং ℓ-কে ঘিরে একটা ছোটো গণ্ডী কেটে নিই--

> Let $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{2}, \ell\} > 0$.

আমরা গণ্ডীটা কাটছি $\ell - \delta$ থেকে $\ell + \delta$. এখানে δ-টা একটু কায়দা করে নিয়েছি, যাতে বেশ ছোটোও হয় ($< \frac{\epsilon}{2}$) আবার গণ্ডীর মধ্যে কোনো negative সংখ্যা না ঢুকে পড়ে। Negative সংখ্যাদের নিয়ে inequality করা বড় ঝকমারি।

Since $r_n \to \ell$,
$\therefore \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \quad r_n \in N(\ell, \delta)$.

ব্যস্ m-এর পর থেকে r_n-রা সবাই গণ্ডীতে ঢুকে পড়েছে। এবার সেই "মোটামুটি GP"-টা তৈরী করব--

Now $\forall n \geq m \quad a_n = a_m r_m \cdots r_{n-1}$. $\therefore \forall n \geq m$

$$a_m (\ell - \delta)^{n-m} < a_n < a_m (\ell + \delta)^{n-m},$$

"মোটামুটি GP" কেন বলছিলাম বুঝলে? যদি পুরোপুরি GP হত তবে

$$a_n = a_m \ell^{n-m}$$

লিখতে পারতাম, কিন্তু এখানে r_n-রা তো ℓ-এর একেবারে সমান নাও হতে পারে, তাই দুদিকে দুটো inequality এসেছে। এবার তবে $\sqrt[n]{a_n}$ কি করছে দেখি--

or

$$\underbrace{a_m^{1/n} (\ell - \delta)^{(n-m)/n}}_{L_n} < \sqrt[n]{a_n} < \underbrace{a_m^{1/n} (\ell + \delta)^{(n-m)/n}}_{U_n}.$$

প্রায় মেরে এনেছি। যদি $n \to \infty$ করে তবে $\frac{1}{n} \to 0$ হবে আর $\frac{n-m}{n} \to 1$ হবে কারণ m তো স্থির আছে। তাই--

Now, as $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} L_n &\to a_m^0 (\ell - \delta)^1 = \ell - \delta, \\ U_n &\to a_m^0 (\ell + \delta)^1 = \ell + \delta. \end{aligned}$$

So

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad L_n > \ell - \epsilon \text{ and } U_n < \ell + \epsilon.$$

এইখানে আবার δ-র জায়গায় ϵ এল কোথা থেকে? Fig 22 দ্যাখো। U_n-রা যাচ্ছে $\ell + \delta$-তে, সুতরাং একটা পর্যায়ের পর ওদেরকে $\ell + \epsilon$-এর নীচে নামতেই হবে। ধরো এই পর্যায়টার নাম দিলাম N_1, মানে $\forall n \geq N_1 \quad U_n < \ell + \epsilon$.
একইভাবে L_n-দের জন্য একটা N_2 পাব। সুতরাং $N = \max\{N_1, N_2\}$ নিলেই চলবে।

Choose this $N \in \mathbb{N}$.

Take any $n \geq N$.

Then

$$\ell - \epsilon < L_n < \sqrt[n]{a_n} < U_n < \ell + \epsilon,$$

and hence $\sqrt[n]{a_n} \in N(\ell, \epsilon)$, as required.

<u>Case 2:</u> $\ell = 0$:

এই কেসটা একইরকম, বা বরং বেশী সহজ। আগের কেসটা বুঝে নিয়ে নিজে নিজে কর দেখি। নীচের অংকটায় সেটাই চেয়েছে।

Exercise 29: উপরের প্রমাণে $\ell = 0$ কেসটা প্রমাণ কর। ■

আরেকটা প্রয়োগ দেখি--

Example 40: Without using integration examine whether

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\{(n+1)(n+2)\cdots(2n)\}^{1/n}}{n} = \frac{4}{e}.$$

[3] **(2013.4c)**

SOLUTION:

Here

$$\frac{\{(n+1)(n+2)\cdots(2n)\}^{1/n}}{n} = \sqrt[n]{a_n},$$

where

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n} = \frac{(2n)!}{n!n^n}$$

Then

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\\ &= \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \times \frac{n^n}{(n+1)^n}\\ &= \frac{4n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\\ &\to 4\times e^{-1}.\end{aligned}$$

We know by standard result that if for a positive sequence $\{a_n\}_n$ we have $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, then $\sqrt[n]{a_n} = \ell$.

Hence the required limit is $\frac{4}{e}$.

■

Answers

1. **(1)** $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$. **(2)** $\frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}$. **(3)** $\frac{1}{2}, \frac{8}{9}, \frac{27}{28}$. **2.** $\{a_{6n}\}_n$. **4.** মনে রেখো যে $\{a_{6n}\}_n$ হল $\{a_{2n}\}_n$ আর $\{a_{3n}\}_n$ দুজনেরই subsequence. সুতরাং $a_{6n} \to L$, আবার $a_{6n} \to K$-ও বটে। তাই $K = L$ হতেই হবে।
5. আগের অংকটার কায়দায় প্রথমে দেখাও যে $\{x_{2n}\}_n$ এবং $\{x_{2n-1}\}_n$ দুজনেই monotone sequence. **6.** না, একটা divergent subsequence ঢুকে পড়ে সব মাটি করে দিতে পারে, যেমন $a_n = \begin{cases} n & \text{if } n \text{ even} \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$
8. $\{a_{2n}\}_n$. **9.** হ্যাঁ, $\{n\}_n$. **10.** $a_n = \begin{cases} n & \text{if } n \text{ even} \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ **11.** যদি $\overline{\lim} = a$ আর $\underline{\lim} = b$ হয় তবে একটা subsequenceপাবে যেটা a-তে converge করে, এবং আরেকটা subsequence পাবে যেটা b-তে converge করে। যেহেতু সব convergent subsequence-ই একই limit-এর যায় বলা আছে, তাই $a = b$. **12.** একটাই

subsequential limit আছে, 0. **13.** 0-ই একমাত্র subsequential limit. **14.** $a_n = \begin{cases} n & \text{if } n \text{ even} \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases}$
15. অসম্ভব। **16.** এমন $\{x_{r_k}\}_k$ চাই যাতে $x_{r_k} \to \infty$ হয়। ধরো $x_{n_k} \to 1$ আর $x_{m_k} \to 2$ আর $x_{p_k} \to 3$. তাহলে $r_1 = n_1$ নাও। তারপর এমন একটা k বার করো যাতে $m_k > r_1$ হয়, এবং $r_2 = m_k$ নাও। এরপর এমন k নাও যাতে $p_k > r_2$ হয়, এবং $r_3 = p_k$ নাও। এইভাবে এগোতে থাকলে যে subsequence-টা পাবে সেটা ∞-তে যেতে বাধ্য। **17.** ধরো $x_{n_k} \to \ell$. তবে $\forall \epsilon > 0$ একটা পর্যায়ের পর থেকে x_{n_k}-গুলো সবাই $N(\ell, \epsilon)$-এর মধ্যে ঢুকে পড়বে। তাই $N(\ell, \epsilon)$-এর মধ্যে infinitely many term পেয়ে যাবে। **18.** $\ell \in A'$. সুতরাং $\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad a_{n_1} \in N'(\ell, 1)$. আবার পরের ধাপে $\exists n_2 > n_1 \quad a_{n_2} \in N'\left(\ell, \frac{1}{2}\right)$. এইভাবে চালাতে থাকো। **19.** $\overline{\lim} a_n = \frac{1}{2}, \quad \underline{\lim} a_n = -\frac{1}{2}$.
21. $\overline{\lim}(k \cdot x_n) = \lim_n \sup\{k \cdot x_m \ : \ m \geq n\} = \lim_n k \sup\{x_m \ : \ m \geq n\} = k \lim_n \sup\{x_m \ : \ m \geq n\} = k \cdot \ell$. **24.** লক্ষ কর যে, যদি $m < n$ হয় তবে $|a_n - a_m| \leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots = \frac{1}{2^{m-1}}$. সুতরাং $m, n \geq N$ হলে $|a_n - a_m| \leq \frac{1}{2^{N-1}}$, যেটা $\to 0$ যখন $N \to \infty$.
25. এটা তো আগের অংকের sequence-টার দ্বিগুণ, তাই এটাও Cauchy নয়। আগের যুক্তিটা এখানেও খাটবে।
26. $\epsilon = 1, \quad m = N, \quad n = N + 1$ নিলে চলবে। **27.** $\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$ হল একটা GP-র যোগফল, সেটা converge করে, আর $|\cos k| \leq 1$. এবার আগের অংকের মত এগোও। **28.** **(1)** $\{\frac{1}{n}\}_n$ **(2)** $\{\frac{\sqrt{2}}{n}\}_n$ **(3)** অসম্ভব।
29. দেখাতে হবে $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \sqrt[n]{a_n} \in N(\ell, \epsilon)$. কিন্তু এখানে $\ell = 0$ হওয়ায় $\sqrt[n]{a_n} < \epsilon$, দেখানোই যথেষ্ট। সেটা তো আগের কেসেই যেভাবে $\sqrt[n]{a_n} < \ell + \epsilon$ দেখানো হয়েছিল, হুবহু সেইভাবেই হবে।

Chapter IX
More on continuity

DAY 1
Sign-preserving property

মনে কর একটা গ্রাফ কাগজে তোমাকে একটা point দিলাম y-axis-এর থেকে কিছুটা উপরে (Fig 1). দিয়ে বললাম এমন একটা continuous function-এর গ্রাফ আঁকো যেটা এই বিন্দু দিয়ে যায়। এটা কঠিন কিছু নয়, তুমি তৎক্ষণাৎ কলম চালিয়ে Fig 2-এর মত অনেক গ্রাফ এঁকে দেবে। কিন্তু আমি চাই এমন একটা continuous function-এর গ্রাফ যেটা যতটা বেশী সম্ভব negative থাকে, অর্থাৎ x-axis-এর উপরে না ওঠে। এবার তুমি সাবধানে আঁকবে Fig 3-এর মত। এখানে x-axis-টা যেন জল, তোমার গ্রাফটা চুপি চুপি জলের তলা দিয়ে এসে, c-এর একেবারে কাছে এসে ভুস্ করে ভেসে উঠে বিন্দুটাকে ছুঁয়েই ফের টুপ করে ডুব দিচ্ছে। আমরা যতটা বেশী সম্ভব জলের তলায় থাকতে চাই, তাই প্রশ্ন হল ঠিক কতটা কাছে গিয়ে ভেসে উঠবে, এবং কতটা পরেই বা ফের ডুব দেবে? যেহেতু গ্রাফটা continuous, তার মানে কলম তোলা চলবে না, ফলে তোমাকে সব সময়েই c-এর একটু আগে ভেসে উঠতে হবে, এবং বিন্দুটাকে ছুঁয়ে ফের জল অবধি পৌঁছে তবে তো ডুব দেবে। ফলে ডুবটা তুমি দিতে পারবে c-এর একটু পরে।

তার মানে তোমার আঁকা function-টা যদি $f(x)$ হয়, তবে $f(c) > 0$ হবার ফলে $f(x)$-টা আসলে c-এর একটু আগে থেকে positive হতে শুরু করবে, এবং c পার করেও কিছুক্ষণ positive থাকতে বাধ্য। এই কথাটাকে আমরা এই ভাবে ভাবতে পারি-- একটা continuous function খালি একটা বিন্দুতে বিচ্ছিন্নভাবে positive হতে পারে না, তার আগে পরে খানিকটা neighbourhood জুড়ে তার positive চিহ্নটা বজায় থাকে। বুঝতেই পারছ যে একই কথা negative চিহ্নের ক্ষেত্রেও খাটে। Continuous function-দের "চিহ্ন বজায় রাখার" এই ধর্মকেই বলে **sign preserving property.** নীচের অংকে এটাকেই অংকের ভাষায় লিখেছে--

Example 1: Let $D \subseteq \mathbb{R}$ and $f : D \to \mathbb{R}$ be continuous on D, and $c \in D$. If $f(c) > 0$, prove that there exists a suitable $\delta > 0$ such that for all $x \in N(c, \delta) \cap D$ we have $f(x) > 0$.[3] **(2007)**

SOLUTION: এখানে আমাদের continuous function-এর sign preserving property প্রমাণ করতে দিয়েছে। এই অংকটা খালি positive চিহ্ন নিয়ে।

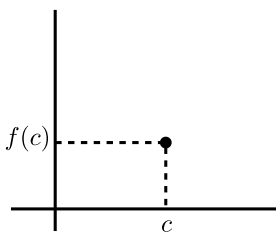
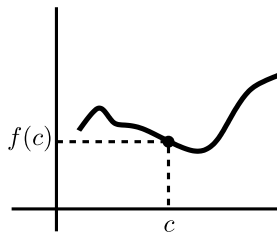
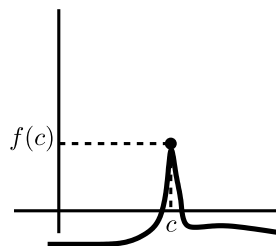
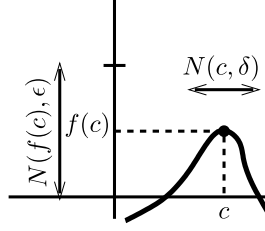



Fig 4

Given:

(1) $f(c) > 0$,

(2) f is continuous over D,

i.e.,

$$\forall a \in D \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a,\delta) \cap D \quad f(x) \in N(f(a),\epsilon).$$

To show:

$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(c,\delta) \cap D \quad f(x) > 0.$

শুরুতেই $\exists \delta > 0$ আছে। কি করে উপযুক্ত $\delta > 0$ পাই? Fig 4 থেকে লক্ষ কর যে আমাদের কাজ হল জলের উপরে জেগে থাকা অংশটুকু নিয়ে। সুতরাং যদি (2)-তে $a = c$ আর $\epsilon = f(c) > 0$ নিই তবে যে δ-টা পাব তাতেই কাজ চলবে।

Let $a = c$ and $\epsilon = f(c) > 0$.

Then by (2) we have $\delta > 0$ such that

$$\forall x \in N(c,\delta) \cap D \quad f(x) \in N(f(c),\epsilon).$$

$\exists \delta$ Choose this δ.

এবার আছে $\forall x \in N(c,\delta) \cap D$, তাই--

Take any $x \in N(c,\delta) \cap D$.

Then

$$f(x) > f(c) - \epsilon = f(c) - f(c) = 0,$$

as required.

■

Example 2: Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ and $a < c < b$. If f is continuous at c $f(c) \neq 0$, show that there exists a neighbourhood of c in which $f(x)$ and $f(c)$ have the same sign.[3] **(2010.6a)**

SOLUTION: এইটা আগের অংকটাই একটু অন্য চেহারায়। খালি এখানে $f(c) > 0$ না বলে $f(c) \neq 0$ বলেছে, তাই এখানে আমরা $|f(c)|$ নিয়ে কাজ করব--

Given:
(1) $f(c) \neq 0$,
(2) f is continuous over $[a,b] = D$, say,
i.e.,

$$\forall a \in D \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in N(a,\delta) \cap D \quad f(x) \in N(f(a),\epsilon).$$

To show:

$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(c,\delta) \cap D \quad f(x) > 0.$

শুরুতেই $\exists \delta > 0$ আছে। উপযুক্ত $\delta > 0$ পাওয়ার জন্য আমরা (2)-তে $a = c$ আর $\epsilon = |f(c)| > 0$ বসাব। আগের অংকের সঙ্গে পার্থক্যটা দেখলে? এখানে আগের মত $\epsilon = f(c)$ নিতে পারছি না, কারণ $f(c) < 0$ হতে পারে।

Let $a = c$ and $\epsilon = |f(c)| > 0$.
Then by (2) we have $\delta > 0$ such that

$$\forall x \in N(c,\delta) \cap D \quad f(x) \in N(f(c),\epsilon).$$

$\boxed{\exists\delta}$ Choose this δ.

এবার আছে $\forall x \in N(c,\delta) \cap D$, তাই--

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in N(c,\delta) \cap D$.

Then

$$f(x) \in (f(c) - |f(c)|, f(c) + |f(c)|),$$

Case 1: If $f(c) > 0$ then $f(x) > f(c) - |f(c| = f(c) - f(c) = 0$.
Case 2: If $f(c) < 0$ then $f(x) < f(c) + |f(c| = f(c) - f(c) = 0$.
So in both cases $f(x)$ has same sign as $f(c)$, as required.

■

এবার sign preserving property-র কিছু প্রয়োগ দেখি।

Example 3: Let f be defined on the interval I and c be an interior point of I Let f be continuous at c. If $f(x)$ maintains both positive and negative signs in every neighbourhood of c, then state with reasons whether $f(c) = 0$ or $f(c) > 0$ or $f(c) < 0$.[3] **(1997)**

SOLUTION:

We shall show that $f(c) = 0$

কারণ যদি তা না হয়, তবে হয় $f(c) > 0$ নয় $f(c) < 0$. যদি প্রথমটা হয় তবে c-কে ঘিরে একটা neighbourhood পাব, যেখানে $f(x) > 0$ যেটা প্রশ্নের শর্ত অনুযায়ী হতে পারে না। আবার $f(c) < 0$ হলে একটা neighbourhood পাব, যেখানে $f(x) < 0$, কিন্তু সেটাও একই কারণে হতে পারে না। দুই ক্ষেত্রেই যুক্তি একই রকম, তাই লেখার সময়ে আমরা একটা বাক্যেই দুটোই ঢুকিয়ে দেব "respectively" ব্যবহার করে--

> Let, if possible, $f(c) \neq 0$. Then either $f(c) > 0$ or $f(c) < 0$.

এই দুটো কেসেই আমরা contradiction দেখাব। প্রথম কেসের যুক্তি একেবারেই ?? নম্বর অংকের মতন।

> Case I: $f(c) > 0$:
> Take $\epsilon = f(c) > 0$.
> $\because f(x)$ is continuous at $x = c$,
> $$\therefore \exists \delta > 0 \forall x \in N(c, \delta) \cap I \quad f(x) \in N(f(c), \epsilon).$$
> Now
> $$N(f(c), \epsilon) = (f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon) = (0, 2f(c)),$$
> since $\epsilon = f(c)$.
> So $\forall x \in N(c, \delta) \cap I$ we have $f(x) > 0$.
> But this contradicts the assumption that $f(x)$ takes negative values in every neighbourhood of c.

দ্বিতীয় কেসটা এতই একই রকম যে আর আলাদা করে দেখাবার দরকার নেই।

> Case II: $f(c) < 0$: Similar argument shows that this is also impossible.
> Hence $f(c) = 0$, as required.

■

মনে আছে নিশ্চয়ই যে $f(x), g(x)$ দুটো continuous function হলে $f(x) - g(x)$-ও continuous হয়। সেইটা মাথায় রাখলেই নীচের অংকটা করা সহজ হবে।

Exercise 1: Let $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be both continuous function. If $f(c) > g(c)$ at some $c \in \mathbb{R}$, then show that $f(x) > g(x)$ over some neighbourhood of c. ■

Exercise 2: Prove that there is a neighbourhood of 5 where the equation $x^{10} - 4x + 37 = 0$ has no solution. ■

এবার ?? নম্বর অংকটার আরেকটা রূপ দেখব। এখানে continuity দিয়ে দেয় নি, limit নিয়ে কাজ করতে বলেছে।

Example 4: If $\lim_{x \to a} f(x) = \ell > 0$, show that there exists a deleted neighbourhood of a in which $f(x)$ is positive.[3] **(2002)**

SOLUTION: Fig 4-এর সঙ্গে Fig 5 তুলনা করলেই ?? নম্বর অংকটার সাথে এর মিল বুঝতে পারবে।

> Given:
> (1) $\ell > 0$,

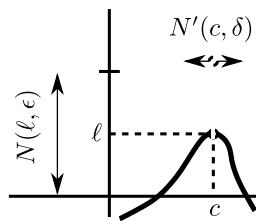



Fig 5

(2) $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in N'(a,\delta) \quad f(x) \in N(\ell,\epsilon).$$

To show:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N'(c,\delta) \quad f(x) > 0.$$

এর পরের ধাপগুলো ঠিক ?? নম্বর অংকের মতই--

$\exists\delta$ Putting $\epsilon = \ell > 0$ in (2) we can choose $\delta > 0$ such that

$$\forall x \in N'(a,\delta) \quad f(x) \in N(\ell,\epsilon).$$

$\forall x$ Take any $x \in N'(a,\delta)$.

Then

$$f(x) > \ell - \epsilon = \ell - \ell = 0,$$

as required.

■

এই অংকটা বুঝে থাকলে নীচের অংকটা করতে অসুবিধা হবার কথা নয়। এখানে খালি positive-এর জায়গায় negative দেওয়া আছে।

Exercise 3: If $\lim_{x\to a} f(x) = \ell < 0$, show that there exists a deleted neighbourhood of a in which $f(x)$ is negative.[3] ■

Exercise 4: A function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ is such that $\lim_{x\to 0} f(x)$ exists and is equal to ℓ. Prove that $\ell \not< 0$.[3] **(2011.5d)**

HINT:

এই অংকটা আগের অংকটারই সামান্য রূপভেদ। এখানে $\mathbb{R}^+$ হল যাবতীয় positive real number-এর set. অর্থাৎ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ বলা মানে হল $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$ বলা। দেখাতে বলেছে যে, যদি $f(x)$ সবসময়ে positive হয় তবে তার limit কখনও negative হতে পারে না। এটাকে আমরা contradiction দিয়ে করতে পারি।

ধরো, যদি সম্ভব হয়, $\ell < 0$. তবে আগের অংকটার মত করে দেখাও যে, 0-এর এমন একটা deleted neighbourhood আছে যেখানে $f(x) < 0$ হতে বাধ্য। ব্যস্, contradiction, কারণ বলে দিয়েছে যে সব x-এর জন্যই $f(x) > 0$. এইবার

এই প্রমাণটাকে গুছিয়ে লিখে ফেলো দেখি! ■

1.1 Preimage property

এইবার continuous function-এর যে property-টা শিখব সেটা বস্তুতঃ sign preserving property-রই নামান্তর। প্রথমে কয়েকটা উদাহরণ দেখে নিই।

Example 5: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Correct or justify the statement: The set

$$A = \{x \in \mathbb{R} \; : \; f(x) > 0\}$$

is an open set.[2] **(2008,2012)**

SOLUTION: প্রথমে একটা ছবি এঁকে ব্যাপারটা বুঝে নিই। Fig 6(a)-তে একটা continuous function-এর গ্রাফ এঁকেছি। এর কিছুটা অংশ y-axis-এর উপরে (অর্থাৎ $f(x) > 0$)। x-axis-এর যে জায়গাটায় $f(x) > 0$ সেটাকে আমরা shade করে দেখিয়েছি, এটাই হল A. প্রশ্ন হল এই A একটা open set কিনা, মানে A-র যেকোনো বিন্দুকে ঘিরেই A-এর মধ্যে একটা neighbourhood আছে কিনা।

এরকম যেকোনো একটা বিন্দু $a \in A$ নিয়েছি। তাহলে $f(a) > 0$ এবার আমরা জানি যে একটা continuous function কখনও খালি একটা point-এর বিচ্ছিন্নভাবে positive হতে পারে না, খানিকটা neighbourhood জুড়ে positive হয় (sign preserving property)। তার মানে a-কে ঘিরে এই neighbourhood-টাও A-র মধ্যেই থাকবে (Fig 6(b)). অর্থাৎ A হল open. অতএব--

> The statement is correct.

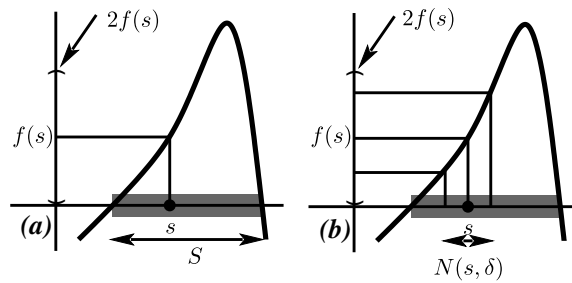
এবার তবে প্রমাণের পালা। প্রথমে লিখে নিই কি দেওয়া আছে--

> Given: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function,
> *i.e.*,
> $$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \quad f(x) \in N(f(a), \epsilon). \qquad (*)$$

কি দেখাতে চলেছি?

> To show: A is open,
> *i.e.*,
> $\forall a \in A \exists \delta > 0 N(a, \delta) \subseteq A.$

প্রথমেই আছে $\forall a \in A$, তাই--

Fig 6

$\boxed{\forall a}$ If $A = \phi$, then A is already open. Otherwise, take any $a \in A$.

এবার আছে $\exists \delta > 0$. লক্ষ কর যে এই δ পাওয়ার ব্যাপারটা ঠিক sign preserving property-র প্রমাণটাই। সুতরাং সেই ধাপগুলোই করে যাব--

Then, by definition of A, $f(a) > 0$.

Taking $\epsilon = f(a) > 0$ in (*) we get $\delta > 0$ such that

$$\forall x \in N(a, \delta) \quad f(x) \in N(f(a), \epsilon).$$

$\boxed{\exists \delta}$ Choose this δ.

এরপর আছে $\forall x \in N(a, \delta)$, তাই--

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in N(a, \delta)$.

Then $f(x) > f(a) - \epsilon = f(a) - f(a) = 0$, as required.

■

Exercise 5: If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous on $\mathbb{R}$ and $S = \{x : f(x) > 0\}$ is a proper subset of $\mathbb{R}$, then show that S is open in $\mathbb{R}$.[1+2] **(2001)**

HINT:

এটা আসলে আগের অংকটাই। খালি এখানে বাড়তি বলা আছে যে

"$\{x : f(x) > 0\}$ is a proper subset of $\mathbb{R}$."

কিন্তু "proper" কথাটার কিছুমাত্র প্রয়োজন নেই। সেই সমাধানটা এখানেও খাটবে। খালি আগের বার যেমন "If $A = \phi$, then A is already open" বলেছিলাম এবার আর সেটা করতে হবে না, কারণ এখানে $S \neq \phi$, যেহেতু proper subset. ■

কিন্তু তা বলে নীচের অংকটা মোটেই ঠিক নয়--

Example 6: If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function, show that the set

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) > 0\}$$

is an open set in $\mathbb{R}$.[3] **(2010.8b)**

SOLUTION: এটা ভুল অংক, কারণ যদি $a = 0, b = 1$ আর $f(x) = x$ নিই, তবে $A = (0, 1]$, যেটা মোটেই open নয়। কিন্তু যদি $[a, b]$-র জায়গায় পুরো $\mathbb{R}$ দিত তবে অসুবিধা ছিল না। আবার (a, b) দিলেও ঠিক থাকত, কারণ সেক্ষেত্রে আমরা A-কে লিখতে পারতাম

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) > 0\} \cap (a, b).$$

ডানদিকের দুটো set-ই open, তাই তাদের intersection বলে A-ও open. ■

Fig 7

$f(x)$
C
$f^{-1}(C)$ হল এই দুটো set-এর union.

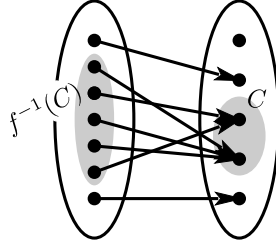
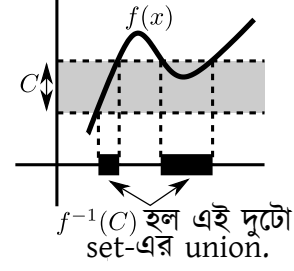



Fig 8

মনে আছে নিশ্চয়ই যে, আমরা দ্বিতীয় অধ্যায়ে শিখেছিলাম preimage কাকে বলে। Fig 7 আর Fig 8 দেখে স্মৃতিটাকে জাগিয়ে নাও। যদি $f : A \to B$ একটা function হয় আর $C \subseteq B$ হয় তবে C-র preimage হবে

$$f^{-1}(C) = \{x \in A \ : \ f(x) \in C\}.$$

যেমন আগের অংকগুলোতে আমরা যে $\{x \ : \ f(x) > 0\}$ set-টা নিয়ে কাজ করেছিলাম, সেটাকে লিখতে পারি $f^{-1}((-\infty, 0))$ হিসেবে। যে যুক্তিতে এই অংকগুলো করলাম ঠিক সেই যুক্তিতেই এই theorem-টাও প্রমাণ করা যাবে। চেষ্টা করে দ্যাখো।

THEOREM

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Let $B \subseteq \mathbb{R}$ be any open set. Then $f^{-1}(B)$ must be open in $\mathbb{R}$.

Proof:

To show

$\forall a \in f^{-1}(B) \quad \exists \delta > 0 \quad N(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B).$

If $f^{-1}(B) = \phi$, then already open, so proved.

Otherwise, take any $a \in f^{-1}(B)$.

Then $f(a) \in B$.

$\because B$ is open, $\therefore \exists \epsilon > 0 \quad N(f(a), \epsilon) \subseteq B$.

$\because f$ is continuous at a,

$$\therefore \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \quad f(x) \in N(f(a), \epsilon).$$

Choose this δ.

To show $N(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B)$,

i.e.,

$\forall x \in N(a, \delta) \quad x \in f^{-1}(B).$

Take any $x \in N(a, \delta)$.

Then $f(x) \in N(f(a), \epsilon) \subseteq f^{-1}(B)$, as required.

[Q.E.D]

Example 7: Show that the set $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \cos x \neq 0\}$ is an open set but not closed.[3] **(2010.9a)**

SOLUTION: উপরের theorem-টা দিয়েই এই অংকের প্রথমটা করা যায়। আমরা নীচের সমাধানটা একেবারে সেই প্রমাণের আদলেই লিখেছি। এখানে আমাদের function-টা হল $\cos x$, যেটা একটা continuous function.

We know that $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined as $f(x) = \cos x$ is continuous. Let $B = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Then $A = f^{-1}(B)$.

বুঝলে তো? কোনো সংখ্যা $x \neq 0$ মানে $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Step 1: Shall show A is open,

i.e.,

 $\forall a \in A \quad \exists \delta > 0 \quad N(a, \delta) \subseteq A$.

 Take any $a \in A \quad (\because A \neq \phi)$.

Then $f(a) \in B$.

$\because B$ is open, $\therefore \exists \epsilon > 0 \quad N(f(a), \epsilon) \subseteq B$.

$\because f(x)$ is continuous at $x = a$,

$$\therefore \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \quad f(x) \in N(f(a), \epsilon).$$

$\exists\delta$ Choose this $\delta > 0$.

 Shall show $N(a, \delta) \subseteq A$,

i.e.,

 $\forall x \in N(a, \delta) \quad x \in A$.

 Take any $x \in N(a, \delta)$.

 Then $f(x) \in N(f(a), \epsilon) \subseteq B$.

$\therefore x \in A$, as required.

দ্বিতীয় অংশের জন্য দেখাব যে, A-র অন্ততঃ একটা limit point আছে যেটা A-র বাইরে। আমরা জানি যে $\frac{\pi}{2} \notin A$, কারণ $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. এবার এমন একটা sequence নেব A-র ভিতরে যেটা গিয়ে এই $\frac{\pi}{2}$-তে converge করে।

Step 2: Shall show that A is not closed.

Consider the sequence $\{a_n\}_n$ defined by

$$a_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Then $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(a_n) \neq 0,$

$\therefore \{a_n\}_n \subseteq A.$

$\because a_n \to \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{\pi}{2}$ is a limit point of A.

But $\frac{\pi}{2} \notin A$, since $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

So A is not closed.

■

আমরা প্রথম অংশটা করলাম theorem-টার প্রমাণের মত করে--B যেহেতু open, তাই $f^{-1}(B)$-ও open. দ্বিতীয় অংশটা কিন্তু তা বলে এইভাবে করা যেত না যে, B যেহেতু closed নয়, তাই $f^{-1}(B)$-ও closed হতে পারে না! এই নিয়েই নীচের অংকটা--

Exercise 6: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে একটা এমন continuous $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ আর এমন একটা set $B \subseteq \mathbb{R}$ দাও যাতে--

1. B closed নয় অথচ $f^{-1}(B)$ closed.
2. B open নয় অথচ $f^{-1}(B)$ open.

■

Preimage-এর একটা অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম হল এই যে "complement-এর preimage" আর "preimage-এর complement" একই জিনিস, মানে--

$$f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c.$$

আবার আমরা জানি যে একটা set-এর পক্ষে closed হওয়া মানে তার complement-এর open হওয়া। এই দুটো তথ্য ব্যবহার করে নীচের অংকটা করতে কষ্ট হওয়া উচিত নয়--

Exercise 7: ধরো $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটা continuous function, আর $A \subseteq \mathbb{R}$ হল একটা closed set. তবে দেখাও যে $f^{-1}(A)$ একটা closed set হবেই। ■

Exercise 8: যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হয় continuous, আর $A \subseteq \mathbb{R}$ হয় এমন একটা set যেটা closed-ও নয়, open-ও নয়। তবে কি $f^{-1}(A)$ কখনো open বা closed হতে পারে? ■

এইবার কয়েকটা অংক করব যেখানে দুটো continuous function নিয়ে কাজ করতে হবে। কিন্তু মূল কায়দাটা থাকবে theorem-টার প্রমাণের মতই।

Example 8: If $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous on $\mathbb{R}$ and the set S given by

$$S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > g(x)\}$$

is a proper subset of $\mathbb{R}$ then prove that S is an open set in $\mathbb{R}$.[3] **(2006)**

SOLUTION:

Let $h(x) = f(x) - g(x)$

$\because f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous,

$\therefore h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous.

Let $B = (0, \infty)$. Then

$$S = \{x \in \mathbb{R} : h(x) > 0\} = h^{-1}(B).$$

এইবার ?? নম্বর অংকের মতোই এগোতে হবে, খালি ওখানকার $f(x)$-এর বদলে $h(x)$, আর A-এর বদলে S বসিয়ে। ■

Example 9: Let $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ be continuous functions. Let

$$A = \{x \in [a, b] \ : f(x) = g(x)\}.$$

Examine whether A is a closed set in $\mathbb{R}$.[5] **(2009)**

SOLUTION:

Shall show that A is closed,

i.e., $A' \subseteq A$,

i.e.,

$\forall L \in A' \quad L \in A.$

If $A' = \phi$ then already $A' \subseteq A$. Otherwise, take any $L \in A'$.

তাহলে এমন একটা sequence $\{a_n\}_n$ পাব A-র ভিতরে যাতে $a_n \to L$ হয়।

Then $\exists \{a_n\}_n \subseteq A$ such that $a_n \to L$.

এবার আমরা দেখাব যে $f(a_n) \to f(L)$ আর $g(a_n) \to g(L)$ হবে। তার জন্য আগে দেখাতে হবে যে $f(L)$ আর $g(L)$ আদৌ exist করে, মানে L আছে $f(x)$ আর $g(x)$-এর domain $[a, b]$-র ভিতরে--

$\because L$ is a limit point of $A \subseteq [a, b]$,

$\therefore L$ is limit point of $[a, b]$,

$\therefore L \in [a, b]$, [$\because [a, b]$ is closed].

Thus, f, g are defined and continuous at L.

Hence $f(a_n) \to f(L)$ and $g(a_n) \to g(L)$.

বাকী কাজ সংক্ষিপ্ত--

But since $a_n \in A$, so $f(a_n) = g(a_n)$.

Thus, taking limit, $f(L) = g(L)$.

So $L \in A$, as required.

■

এই অংকটা আমরা limit point দিয়ে করলাম। এটা কি সেই theorem-টার প্রমাণের মত করে preimage দিয়ে করা যেত না? হ্যাঁ যেত, কিন্তু theorem-টা আমরা দিয়েছিলাম সেইসব continuous function-দের জন্য যাদের domain হল $\mathbb{R}$. যদি $f(x)$-এর domain পুরো $\mathbb{R}$ না হয় তবে একটা ছোট্টো পরিবর্তন করতে হবে--

Exercise 9: Let $f : D \to \mathbb{R}$ be a continuous function, where $D \subseteq \mathbb{R}$. Let $A \subseteq \mathbb{R}$ be any open set. Then show that $f^{-1}(A)$ must be of the form $B \cap D$, where B is open in $\mathbb{R}$. ■

লক্ষ কর যে, $D = \mathbb{R}$ হলেই এটা theorem-টায় পরিণত হয়। Closed set-এর জন্যও একইরকম কথা বলা যায়--

Exercise 10: Let $f : D \to \mathbb{R}$ be a continuous function, where $D \subseteq \mathbb{R}$. Let $A \subseteq \mathbb{R}$ be any closed set. Then show that $f^{-1}(A)$ must be of the form $B \cap D$, where B is closed in $\mathbb{R}$. ■

আমরা জানি যে দুটো open set-এর intersection হয় open. আবার দুটো closed set-এর intersection হয় closed. সুতরাং উপরের অংকদুটো ব্যবহার করে নীচের অংকটা করতে অসুবিধা হওয়া উচিত নয়।

Exercise 11: Let $f : D \to \mathbb{R}$ be a continuous function, where $D \subseteq \mathbb{R}$ is *open (closed)* in $\mathbb{R}$. Let $A \subseteq \mathbb{R}$ be any open set. Then show that $f^{-1}(A)$ must be open (closed) in $\mathbb{R}$. ■

এইবার **??** নম্বর অংকটাকে preimage ব্যবহার করে করার চেষ্টা কর।
আচ্ছা, preimage নিয়ে তো অনেক কথা বললাম, কিন্তু image নিয়ে তো কিছু বললাম না? যেমন A যদি open হয় তবে $f(A)$-ও কি open হতে বাধ্য? আসলে এরকম কিছুই বলা যায় না।

Exercise 12: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে একটা এমন continuous $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ আর এমন একটা set $A \subseteq \mathbb{R}$ দাও যাতে--

1. A closed অথচ $f(A)$ closed নয়।
2. A open অথচ $f(A)$ open নয়।

■

DAY 2
Intermediate value property

ব্যাপারটা প্রথমে ছবি এঁকে বোঝা যাক। Fig 9-এ দুটো বিন্দু দেওয়া আছে, একটা x-axis-এর কিছুটা উপরে, অন্যটা কিছুটা নীচে। তোমার কাজ হল এমন একটা continuous function-এর গ্রাফ আঁকা যেটা এই দুটো বিন্দু দিয়ে যায়। এটা কঠিন কাজ নয়, একটা উত্তর Fig 10-এর দেখানো আছে। লক্ষ কর যে গ্রাফটা a থেকে b-তে যাবার পথে x-axis-কে একবার ছেদ করেছে। এবার তোমাকে একটা কঠিন কাজ করতে দেব--তোমাকে এমন একটা continuous গ্রাফ আঁকতে হবে যেটা ওই দুটো বিন্দু দিয়ে যায়, কিন্তু a থেকে b-এর মধ্যে কোথাও x-axis-কে ছেদ না করে। খানিকক্ষণ চেষ্টা করে দেখলেই বুঝবে যে এরকম গ্রাফ আঁকা অসম্ভব। সাবধান, Fig 11-এর মত আঁকলে কিন্তু চলবে না, ওটা কোনো function-এর গ্রাফই নয় (কেন নয়?)।
তার মানে যদি $f(x)$ এমন কোনো continuous function হয় যার ক্ষেত্রে $f(a)$ আর $f(b)$-র মধ্যে একজন positive, অন্যজন negative, তবে কোনো না কোনো point c পাবই (a, b)-র মধ্যে যেখানে $f(c) = 0$ হবে। ঠিক এই কথাটাই এখানে প্রমাণ করতে দিয়েছে।

Example 10: If $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is continuous and if $f(a)$ and $f(b)$ are of opposite signs, then prove that there exists at least one point c in the open interval (a, b) such that $f(c) = 0$[4] **(2000)**

SOLUTION:

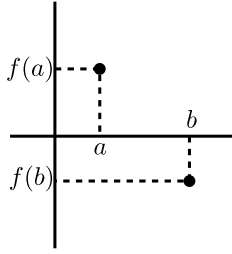
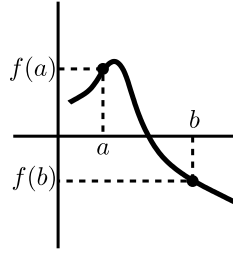
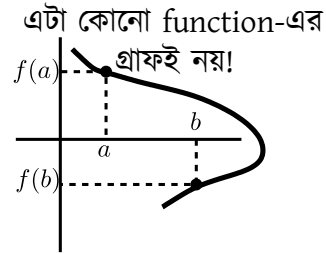



Fig 9 **Fig 10** **Fig 11**

> We assume, without loss of generality, that $f(a) > 0$ and $f(b) < 0$

$f(a)$ আর $f(b)$-র মধ্যে কে positive কে negative সেটা বলে দেয় নি, তাই একটা কিছু ধরে নিলাম। উল্টোটা ধরলেও প্রমাণের মূল যুক্তি একই থাকত।

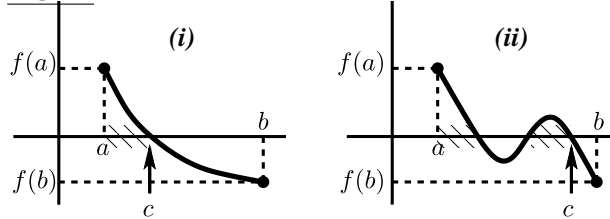
> To show
> $\exists c \in (a, b) \quad f(c) = 0.$

কি করে c পাব সেটা বোঝার জন্য প্রথমে এই set-টা দ্যাখো--

> Let $A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$.

Fig 12-এ দুটো উদাহরণ দেখিয়েছি। মনে রেখো A হল x-axis-এর সেই অংশগুলো যেখানে গ্রাফটা x-axis-এর উপরে মাথা তুলেছে। ছবিতে আমরা A-কে shade করে দেখিয়েছি। লক্ষ কর যে যদি $c = \sup A$ নিই, তবে দুই ক্ষেত্রেই $f(c) = 0$ হচ্ছে। এই ব্যাপারটা যে সব সময়েই হবে, সেটা আমরা এক্ষুণি প্রমাণ করব। কিন্তু আগে নিজে কয়েকটা ছবি এঁকে নিঃসন্দেহ হয়ে নাও।
আমরা $c = \sup A$ নিতে চলেছি, কিন্তু তার আগে দেখানো দরকার যে $\sup A$ আদৌ আছে, মানে A হল nonempty এবং bounded above.

> $A \subseteq [a, b]$, and so is bounded from above by b.
> $\because f(a) > 0 \therefore a \in A$, and $\therefore A \neq \phi$.
> $\therefore \sup A$ exists.
> $\boxed{\exists c}$ Choose $c = \sup A$.

Fig 12

এবার তবে দেখানো শুরু করি যে $f(c)=0$. আমরা proof by contradiction ব্যবহার করব, মানে $f(c)\neq 0$ ধরে শুরু করব, এবং শেষমেশ একটা contradiction-এ পৌঁছব।

Shall show that $f(c)=0$.
Let, if possible, $f(c)\neq 0$.

$f(c)\neq 0$ হলে দুটো কেস হতে পারে--হয় $f(c)>0$ নয় $f(c)<0$. প্রথম কেসে আমরা দেখাব যে c কোনোভাবেই A-র upper bound হতে পারে না--এটা একটা contradiction কারণ আমরা $c=\sup A$ নিয়েছিলাম।

Case I: $f(c)<0$:

Take $\epsilon=-f(c)>0$.

$\because f(x)$ is continuous at $x=c$,

$$\therefore \exists\delta>0 \quad \forall x\in N(c,\delta) \quad f(x)\in N(f(c),\epsilon).$$

Now $\because \epsilon=-f(c)$,

$\therefore N(f(c),\epsilon)=(2f(c),0)$.

$\therefore \forall x\in N(c,\delta)$ we have $f(x)<0$.

Thus, no $x>c-\delta$ can be in A.

কারণ c-এর থেকে বড়ো কেউ তো এমনিতেই A-র মধ্যে থাকতে পারে না।

$\therefore c-\delta$ is an upper bound for $A.(\Rightarrow\Leftarrow\because c$ is least upper bound of $A.)$

এবার দ্বিতীয় কেস। এখানে দেখাব যে c-এর থেকেও ছোটো upper bound আছে A-র জন্য। এটা একটা contradiction, কারণ $c=\sup A$ হল A-র সবচেয়ে ছোটো upper bound.

Case II: $f(c)>0$:

Take $\epsilon=f(c)>0$. $\because f(x)$ is continuous at $x=c$,

$$\therefore \exists\delta>0 \quad \forall x\in N(c,\delta) \quad f(x)\in N(f(c),\epsilon).$$

Now $\because \epsilon=f(c)$,

$\therefore N(f(c),\epsilon)=(0,2f(c))$.

So $\forall x\in N(c,\delta)$ we have $f(x)>0$.

In particular, $f\left(c+\frac{\delta}{2}\right)>0$.

Thus, $c+\frac{\delta}{2}\in A(\Rightarrow\Leftarrow\because c$ is an upper bound of $A)$.

■

Exercise 13: Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be continuous on $[a,b]$ and $f(a)f(b)<0$. Prove that there exists at least one point $c\in(a,b)$ such that $f(c)=0$. [5] **(2002,2004,2011)**

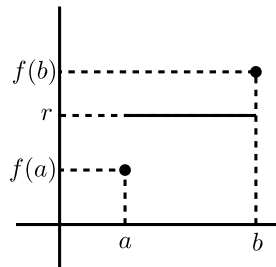



Fig 13

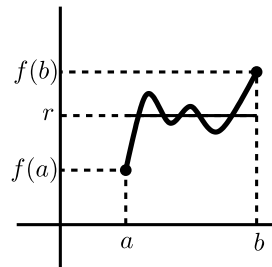



Fig 14

HINT:
এটা আসলে আগের অংকটাই। $f(a)f(b) < 0$ মানে $f(a)$ আর $f(b)$ দুজনে 0-র দুদিকে আছে। ■

এতক্ষণ আমরা দুটো point নিচ্ছিলাম যারা x-axis-এর দুইদিকে আছে, এবং দেখিয়েছি যে কোনো continuous function দিয়ে তাদের যোগ করতে হলে x-axis-কে অন্ততঃ একবার ছেদ না করে পথ নেই। একই কথা কিন্তু x-axis-এর সঙ্গে সমান্তরাল যে কোনো লাইনের সম্বন্ধেই বলা যেত। যেমন Fig 13-তে $y = r$ দিয়ে একটা লাইন এঁকেছি, আর তার দুই দিকে দুটো point নিয়েছি। যদি এই দুটো point-কে একটা continuous function-এর গ্রাফ দিয়ে যোগ করতে হয় (Fig 14-এর মত) তবে (a, b)-র মধ্যে কোথাও একটা $f(x) = r$ হওয়া ছাড়া গত্যন্তর নেই। এই কথাটাই হল বিখ্যাত **intermediate value theorem**.

Example 11: State intermediate value theorem.[1] **(2012.6a (part 1))**

SOLUTION:

Intermediate value theorem

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Let r be a number strictly between $f(a)$ and $f(b)$. Then there exists $c \in (a, b)$ such that $f(c) = r$.

■

2.1 Applications

2.1.1 গণ্ডী পার করা

Intermediate value theorem-কে বলা যায় গণ্ডী পার করার theorem. একটা continuous function-এর গ্রাফকে গণ্ডীর এধার থেকে ওধারে যেতে হবে, তবে কোনো এক জায়গায় (অন্ততঃ এক জায়গায়) গণ্ডীটাকে ছেদ না করে উপায় নেই। Theorem-টা যেভাবে লেখা হয়েছে তাতে গণ্ডীটাকে নেওয়া হয়েছে x-axis-এর সঙ্গে সমান্তরাল একটা লাইন হিসেবে, কিন্তু গণ্ডীটাকে অন্যভাবে নিলেও আপত্তি নেই। এবার সেরকম কিছু উদাহরণ দেখি।

Example 12: Prove that there exists $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ such that $\cos x = x$[3] **(1997)**

SOLUTION: প্রথমে চট্ করে $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$-এর জন্য $\cos x$ আর x-এর গ্রাফদুটো এঁকে নিই (Fig 15). দেখাই যাচ্ছে যে, ওরা পরস্পরকে ছেদ করেছে। এখানে $y = x$-এর গ্রাফটা যেন গণ্ডীটা। $\cos x$-এর গ্রাফটা তার একধার থেকে শুরু হয়েছে,

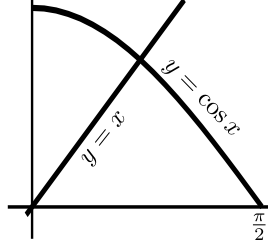



Fig 15

যেহেতু $\cos x > x$ যখন $x = 0$, আর অন্যধারে গিয়ে শেষ হয়েছে, কারণ $\cos x < x$, যখন $x = \frac{\pi}{2}$. অতএব কোথাও না কোথাও গণ্ডী পেরোতেই হবে, মানে $\cos x = x$ হতেই হবে। এখানে গণ্ডীটা একটা হেলানো লাইন। তাই সরাসরি $\cos x$-এর উপরে intermediate value theorem লাগাতে পারছি না। কিন্তু যদি গণ্ডী থেকে $\cos x$ কতটা উপরে আছে সেটা নিই, মানে $\cos x - x$ নিই, তবে তার উপরে theorem-টা স্বচ্ছন্দে লাগানো চলতে পারে--

> For $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, define $f(x) = x - \cos x$.

এবার ধাপে ধাপে intermediate value theorem-এর শর্তগুলো পরীক্ষা করে দেখি। প্রথম শর্ত continuity–

> $\because x$ and $\cos x$ are continuous,
> $\therefore f(x)$ is continuous.

এবার দেখব দুই প্রান্তে f-এর value দুটো যেন 0-র দুই দিকে থাকে।

> Also $f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$,
> and $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \cos(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 0 > 0$.

ব্যস্, এবার আমরা intermediate value theorem লাগাতে পারি--

> So $f(0) < 0 < f(\frac{\pi}{2})$.
> Hence, by the intermediate value theorem, $\exists x \in (0, \frac{\pi}{2})$ such that $f(x) = 0$.
> $\therefore x \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad \cos x = x$, as required.

■

এই অংকটায় $\cos x$-এর খালি তিনটে বৈশিষ্ট্য কাজে লাগল--এক, সেটা continuous, দুই, $x = 0$-তে $\cos x \geq x$, আর তিন, $x = \frac{\pi}{2}$-তে $\cos x \leq x$. এই তিনটে বৈশিষ্ট্যওয়ালা যে কোনো function থাকলেই একই যুক্তি খাটানো যেত। নীচের অংকে আমরা সেটাই করব।

Exercise 14: Let the functions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ and $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ be continuous on $[a, b]$ and $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$. Show that there exists a point c in (a, b) such that $f(c) = g(c)$.[3] **(2012.6a (part 2))** ■

Example 13: If $f : [a, b] \to [a, b]$ is a continuous function, prove that there exists at least one

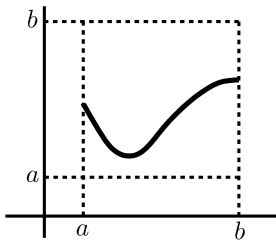
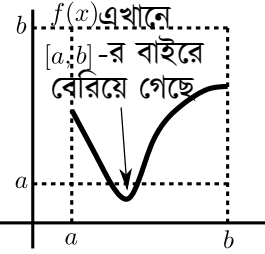
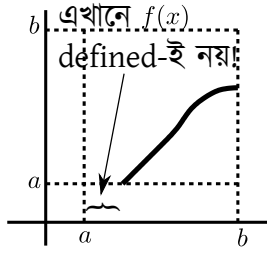
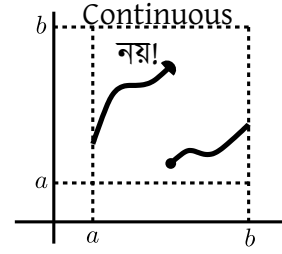



Fig 16 **Fig 17** **Fig 18** **Fig 19**

point c in $[a, b]$ such that $f(c) = c$[3] **(1999)**

SOLUTION: অংকটাকে প্রথমে ভালো করে বোঝা যাক। "$f : [a, b] \to [a, b]$ is a continuous function" মানে গ্রাফটা দেখতে Fig 16-এর মত, Fig 17, Fig 18 বা Fig 19-এর মত নয়।

আমাদের দেখাতে হবে যে, এমন অন্ততঃ একটা $c \in [a, b]$ আছে যাতে $f(c) = c$ হয়, অর্থাৎ কোনো একটা c-তে $f(x)$ এবং x-এর গ্রাফ পরস্পরকে ছেদ করবে। x-এর গ্রাফ হল 45° লাইনটা, এইটা হল আমাদের গণ্ডী। Fig 20 থেকে দেখা যাচ্ছে যে $f(x)$-এর গ্রাফ যে ভাবেই নিই না কেন সেটা এই গণ্ডীকে ছেদ করতে বাধ্য। Intermediate value theorem লাগাবার আদর্শ সুযোগ।

দেখা যাক $f(x)$-টা গণ্ডী থেকে (মানে x থেকে) কতটা উপরে আছে--

> Define $g(x) = f(x) - x$.

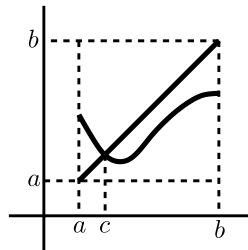
এর উপরেই আমরা intermediate value theorem লাগাব।

> To Show: $\exists c \in [a, b] \quad f(c) = c$,
> *i.e.*, $\exists c \in [a, b] \quad g(c) = 0$.

একে একে শর্তগুলো পরীক্ষা করি। প্রথমে continuity–

> $\because f(x)$ and x are continuous,
> $\therefore g(x)$ is also continuous.

এবার দেখি দুই প্রান্তে $g(x)$-এর চিহ্ন আলাদা কিনা, মানে $g(a)$ আর $g(b)$-এর মধ্যে একজন positive আর অন্যজন negative কিনা।

Fig 20

$\because f : [a, b] \to [a, b]$
$\therefore a \le f(a)$ and $f(b) \le b$.
$\therefore g(b) \le 0 \le g(a)$.

এবার আমরা intermediate value theorem লাগানোর জন্য প্রায় তৈরী।

If $g(a) = 0$, then we can take $c = a$.
If $g(b) = 0$, then we can take $c = b$.
Otherwise, $\therefore g(b) < 0 < g(a)$, and so, by the intermediate value theorem, $\exists c \in (a, b)$ such that $g(c) = 0$.
So in all cases $\exists c \in [a, b]$ such that $f(c) = c$, as required.

■

এখনও পর্যন্ত যে কয়টা অংক দেখলাম তাতে সব সময়েই গণ্ডীটা ছিল একটা সরলরেখা। কিন্তু intermediate value theorem লাগানোর জন্য তার কোনো দরকার নেই, খালি গণ্ডীটা continuous হলেই হল, মানে গণ্ডীর মধ্যে ফাঁকফোকর থাকলে চলবে না। নীচের অংকটা করার আগে $x \in [0, 1]$-এর জন্য x^2-এর গ্রাফটা এঁকে নিও, তাহলে বুঝতে সুবিধা হবে।

Exercise 15: If $f : [0, 1] \to [0, 1]$ is a continuous function, then show that $f(c) = c^2$ for some $c \in [0, 1]$. ■

Exercise 16: ধরো $f : [0, 1] \to [0, 1]$ হল যে কোনো একটা continuous function. তাহলে নীচের কথাগুলো ঠিক না ভুল?

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists c \in [0, 1] \quad f(c) = c^n$.
2. $\exists c \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(c) = c^n$.

■

Exercise 17: If $f(x)$ is a continuous function with $f(0) = 0$ and $f(1) = 1$, then show that there must be some $c \in [0, 1]$ such that $c^2 + \big(f(c)\big)^2 = 1$. ■

Exercise 18: বেশ একটা খটমট দেখতে গণ্ডী নিয়ে এরকম একটা অংক বানাও। তারপর বন্ধুদের উপর পরীক্ষা করে দ্যাখো ওরা অংকটা দেখে গণ্ডীটা চিনতে পারে কি না! ■

2.1.2 ওভারটেক করা

মনে কর রামপুর আর শ্যামপুর দুটো জায়গা, তাদের মধ্যে যোগাযোগের একটাই রাস্তা। একটা বাস 6-টার সময়ে রামপুর থেকে রওনা দিয়ে 7-টার সময়ে শ্যামপুরে পৌঁছোয়। তোমার একটু দেরী হয়ে যাওয়ায় বাসটা ধরতে পারো নি, তাই একটা ট্যাক্সি নিতে হয়েছে। ট্যাক্সিটা 6-টার একটু পরে রামপুর ছেড়ে 7-টার আগেই শ্যামপুর ঢুকে গেছে। এ থেকে তুমি নিশ্চয়ই বলতে

Fig 21

পারো যে ট্যাক্সিটা কোথাও একটা বাসটাকে ওভারটেক করেছে। কারণ একই রাস্তা দিয়ে দুটো গাড়ী যদি যায়, তবে পিছনের গাড়ীটার পক্ষে সামনে আসার একটাই পথ--ওভারটেক করা, কারণ পিছনের গাড়ীটা তো আর হঠাৎ বেমালুম শূন্যে মিলিয়ে গিয়ে পরমুহূর্তেই ভোজবাজির মত সামনে উদয় হতে পারত না! এই যে কথাটা বললাম এটা কিন্তু আসলে intermediate value theorem ছাড়া আর কিছুই নয়। ঘড়িতে যখন t সময় দেখাচ্ছে তখন বাসটা কত দূর গেছে তাকে যদি $B(t)$ বলি, আর ট্যাক্সিটা যত দূর গেছে তাকে যদি বলি $T(t)$, তবে $B(t)$ আর $T(t)$ দুজনেই continuous হবে (কারণ গাড়ীগুলো ভোজবাজির মত লাফ মেরে এক জায়গা থেকে অন্যজায়গায় গিয়ে পড়তে পারে না)। ধরো ট্যাক্সিটা $t = t_1$-এ রওনা দিয়ে $t = t_2$-তে পৌঁছেছে। তাহলে

$$B(t_1) > T(t_1) \text{ আর } B(t_2) < T(t_2),$$

কারণ বাসটা আগে ছেড়ে পরে পৌঁছেছে। এবার $f(t) = B(t) - T(t)$ নিয়ে intermediate value theorem লাগালেই দেখবে এমন একটা $t \in (t_1, t_2)$ আছে যখন $B(t) = T(t)$, অর্থাৎ যখন ট্যাক্সিটা বাসটাকে ওভারটেক করছে।
এইরকম যুক্তিতে অনেক মজার অংক বানানো যায়। প্রথমে একটা সোজা অংক।

Exercise 19: সাড়ে সাতটা থেকে পৌনে আটটার মধ্যে এমন একটা সময় আছে যখন ঘড়িতে ঘন্টা আর মিনিটের কাঁটা একজায়গায় থাকে। ঠিক না ভুল? ■

এবার একটু কঠিন অংক।

Exercise 20: রামপুর আর শ্যামপুরের মধ্যে একটা বাস রাস্তা আছে, আবার ইদানীং একটা রেললাইনও হয়েছে। Fig 21 দ্যাখো। বাসরাস্তাটা একেবারে সোজা, কিন্তু রেললাইনটা এঁকে বেঁকে যায়, কিন্তু তাও বাসেই সময় লাগে বেশী। প্রতিদিন 6-টার সময়ে একটা বাস রামপুর থেকে রওনা দিয়ে 9-টায় শ্যামপুর ঢোকে। আবার $6:15$-এ একটা ট্রেন শ্যামপুর ছেড়ে $8:30$-তে রামপুর পৌঁছয়। দেখাতে হবে যে $6:15$ থেকে $8:30$-এর মধ্যে অন্ততঃ একটা মুহূর্ত আছে যখন রামপুর থেকে বাসের দূরত্ব আর শ্যামপুর থেকে ট্রেনের দূরত্ব ঠিক সমান! এখানে দূরত্ব বলতে সরলরেখা বরাবর দূরত্ব ধরা হচ্ছে। বাসরাস্তাটাও যদি আঁকা বাঁকা হত তবে কিন্তু অংকটা হত না, কেন বল তো? ■

2.1.3 অন্যান্য

এবার intermediate value theorem-এর কিছু পাঁচমিশালী প্রয়োগ দেখব।

Example 14: Let $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ be continuous on $[0, 1]$ and f assumes only rational values If $f(1/2) = 1/2$ prove that $f(x) = 1/2$ for all x in $[0, 1]$.[2] **(2001)**

SOLUTION: Intermediate value theorem-এর বক্তব্য এই যে যদি কোনো continuous function দুটো value a, b নেয় তবে তাদের মাঝের যাবতীয় value-ও নিতে বাধ্য। ধর $a < b$. তবে (a, b)-র মধ্যে প্রচুর সংখ্যা আছে, তাদের অনেকে rational, বাকীরা irrational. সুতরাং f-কে বাধ্য হয়েই rational এবং irrational দুধরণেরই value নিতে হবে। এই ব্যাপারটার উপর ভিত্তি করেই এই অংকটা তৈরী।
আমরা এখানে contradiction লাগাব।

Let, if possible, $f(x)$ assume some value $\neq \frac{1}{2}$,
ie., $\exists a \in \mathbb{R} \quad f(a) \neq \frac{1}{2}$.
By intermediate value theorem f must assume every value between $f(a)$ and $\frac{1}{2}$.
Since irrationals are dense in $\mathbb{R}$, there is at least one irrational between $f(a)$ and $\frac{1}{2}$. But f cannot assume irrational values $(\Rightarrow\Leftarrow)$.
This contradiction proves the result.

■

একই যুক্তিতে নীচের অংকগুলো চেষ্টা কর--

Exercise 21: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function assuming only irrational values. Show that f must be a constant function. ■

Exercise 22: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function assuming only integer values. If $f(5) = 3$ then find $f(0)$. ■

এবার আরেকরকমের অংক দেখা যাক।

Example 15: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be continuous and injective on $[a, b]$. Prove that f is strictly monotone on $[a, b]$.[3] **(1998,2012.6c)**

SOLUTION: এই অংকটায় বার বার intermediate value theorem লাগাতে হবে। আমরা খালি প্রথম দুবার সবটা বিশদ করে লিখব, তারপর থেকে "similarly" লিখে ছেড়ে দেব।
আমাদের দেখাতে বলেছে strictly monotone, সেটা increasing-ও হতে পারে, decreasing-ও হতে পারে। দুটো কেসের প্রমাণই একইরকম, তাই যে কোনো একটা করলেই হবে। আমরা এখানে increasing কেসটা করব।

We shall assume that $f(a) < f(b)$ and show that f must be strictly increasing,
i.e.,

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \quad \left[x_1 < x_2 \implies f(a) < f(x_1) < f(x_2) < f(b)\right].$$

ছোট্টো করে বলে রাখি যে decreasing কেসটাও একইরকমভাবে করা যায়।

Similar argument will show that if $f(a) > f(b)$ then f is strictly decreasing.

এবার তবে প্রমাণটা শুরু করি--

$\forall x_1, x_2$ Take any $x_1, x_2 \in (a, b)$ with $x_1 < x_2$.

আমরা ধাপে ধাপে এগোব, প্রথম ধাপে দেখাব যে $f(a) < f(x_1)$. আমরা proof by contradiction ব্যবহার করব। যদি $f(a) < f(x_1)$ না হত তবে $f(a) > f(x_1)$ হত (কারণ বলা আছে যে f কখনও একই value দুবার নিতে পারে না, তাই $f(a) \neq f(x_1)$.) সেক্ষেত্রে গ্রাফটা হত Fig 22-এর মত। লক্ষ কর এখানে ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনটা গ্রাফটাকে দুবার ছেদ করেছে, তার মানে f ওই value-টা দুইবার নিয়েছে, মানে injective রইল না, সুতরাং contradiction!

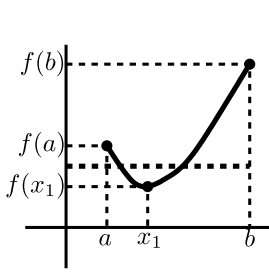
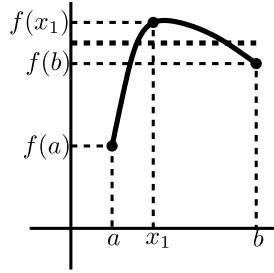
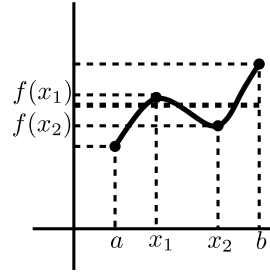
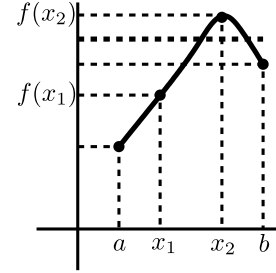



Fig 22 **Fig 23** **Fig 24** **Fig 25**

Step 1: Shall show $f(a) < f(x_1)$.
Let, if possible, $f(x_1) \leq f(a)$.
$\because$ Each value between $f(a)$ and $f(b)$ is taken just once,
$\therefore f(x_1) < f(a)$.
Thus, $f(x_1) < f(a) < f(b)$.
Applying intermediate value theorem to f over $[x_1, b]$, we get $d \in (x_1, b)$ with $f(d) = f(a) (\Rightarrow\Leftarrow \because$ the value $f(a)$ is then taken just once).

ঠিক একই রকম যুক্তিতে দেখাব যে $f(x_1) < f(b)$. যদি এটা না হয় তবে $f(x_1) > f(b)$, সুতরাং গ্রাফটা হবে Fig 23-র মত।

Step 2: Shall show $f(x_1) < f(b)$.
Otherwise, $f(b) < f(x_1) \because f(b) \neq f(x_1)$.
So $f(a) < f(b) < f(x_1)$, and so applying intermediate value theorem over the interval $[a, x_1]$ we get $c_2 \in (a, x_1)$ such that $f(c_2) = f(b) (\Rightarrow\Leftarrow \because f$ is injective).
Thus combining steps 1 and 2 we get

$$f(a) < f(x_1) < f(b). \quad (*)$$

এবার আমরা একই যুক্তি আরও একবার লাগাব, কিন্তু এবার x_1, x_2, b নিয়ে। তাতে পাব $f(x_1) < f(x_2) < f(b)$. যদি $f(x_1) < f(x_2)$ না হত তবে গ্রাফটা হত Fig 24-এর মত, আর $f(x_2) < f(b)$ না হলে হত Fig 25-এর মত।

Step 3: Putting x_1 in place of a, and x_2 in place of x_1 in (*) we can similarly show

$$f(x_1) < f(x_2) < f(b). \quad (**)$$

Combining (*) and (**) we get

$$f(a) < f(x_1) < f(x_2) < f(b),$$

as required.

■

Exercise 23: If a real valued function f defined on the closed interval $[a,b]$ be one-one and continuous then show that f is strictly increasing.[5] **(2005)**

HINT:

আগের অংকটাই দেবার চেষ্টা করেছিল, কিন্তু ভুল করে ফেলেছে। বলা উচিত ছিল strictly monotone, বলে ফেলেছে strictly increasing. সেই ভুলটা না করলে আগের অংকটা আর এইটা একই। ■

Example 16: Let a real valued function f on $[a,b]$ be strictly increasing. Show that the inverse function f^{-1} exists and is strictly increasing on the interval $[\alpha,\beta]$ where $\alpha = f(a)$ and $\beta = f(b)$. If, further, f is continuous on $[a,b]$, then show that f^{-1} is continuous on $[\alpha,\beta]$.[5] **(2005)**

SOLUTION:

অংকটা ভুল। যে কোনো function $f:[a,b]\to[\alpha,\beta]$ strictly increasing হলেই f^{-1} থাকবে এমন কোনো কথা নেই। যেমন Fig 26-এ যে $f:[0,2]\to[0,3]$-এর গ্রাফ রয়েছে সেটা অবশ্যই strictly increasing, কিন্তু মোটেই onto নয়, তাই f^{-1} নেই।

আসলে অংকটায় বলতে চেয়েছিল যে f একটা continuous function-ও বটে। এই শর্তটা অংকের দ্বিতীয় অংশে দিয়েছে, কিন্তু আসলে প্রথম অংশেও থাকা উচিত ছিল। আমরা f-কে continuous ধরে সমাধান করব।

তাহলে কি দেওয়া আছে?

> Given: f is continuous, strictly increasing on $[a,b]$ with $\alpha = f(a)$ and $\beta = f(b)$.

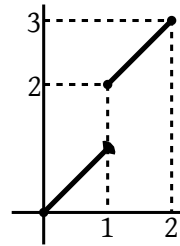
কি দেখাতে হবে?

> To Show: $f^{-1}:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ exists and is continuous.

প্রথমে দেখাব যে f^{-1} exist করে, মানে f হল injective (1-to-1) এবং surjective (onto).

> <u>Step 1: Existence of f^{-1}:</u>
>
> f is injective, since <u>strictly</u> increasing.
>
> It is surjective, since for any $y\in[\alpha,\beta]$ there is $x\in[a,b]$ with $f(x)=y$,

Fig 26

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \le x < 1 \\ x+1 & \text{if } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

by intermediate value theorem.

দেখলে, কেন continuity লাগল?

So $f : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ is bijective, and hence $f^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ exists.

এবার দেখাব যে f^{-1} হল strictly increasing. যথারীতি definition দিয়ে শুরু করব।

Step 2: Shall show f^{-1} is strictly increasing,

তার মানে

$$\forall x_1, x_2 \in [\alpha, \beta] \quad \big[x_1 < x_2 \implies f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)\big].$$

আমরা contradiction লাগাব, তাই শুরু করব এর negation-টা ধরে নিয়ে--

Let, if possible, this be false.
Then

$$\exists x_1, x_2 \in [\alpha, \beta] \quad x_1 < x_2 \text{ and } f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2).$$

Applying f to both sides we get

$$f(f^{-1}(x_1)) \geq f(f^{-1}(x_2)),$$

since f is strictly increasing.

মনে রেখো যে $f(f^{-1}(x)) = x$. তাই--

So $x_1 \geq x_2 (\Rightarrow\Leftarrow \because x_1 < x_2)$.
$\therefore f^{-1}$ is strictly increasing.

এবার দেখাব যে f^{-1} হল continuous–

Step 3: Shall show f^{-1} is continuous,
i.e.,

$$\forall c \in [\alpha, \beta] \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$
$$\forall y \in N(c, \delta) \cap [\alpha, \beta] \quad f^{-1}(y) \in N(f^{-1}(c), \epsilon).$$

প্রথমে $\forall$-গুলোর ব্যবস্থা করি--

$\boxed{\forall c, \epsilon}$ Take any $c \in [\alpha, \beta]$ and $\epsilon > 0$.

এবার $\exists \delta > 0$ আছে। Fig 27-এর সঙ্গে নীচের ধাপগুলো মিলিয়ে নাও।

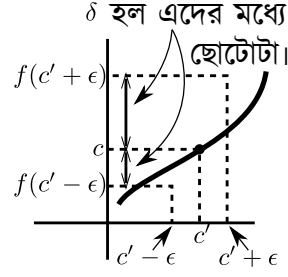



Fig 27

$\boxed{\exists\delta}$ Let $c' = f^{-1}(c)$. So $f(c') = c$.
Choose

$$\delta = \min\{c - f(c'-\epsilon), f(c'+\epsilon) - c\} > 0,$$

since f is strictly increasing.

এবার আছে $\forall y \in N(c,\delta) \cap [\alpha,\beta]$.

$\boxed{\forall y}$ Take any $y \in N(c,\delta) \cap [\alpha,\beta]$.

এবার দেখাতে হবে $f^{-1}(y) \in N(f^{-1}(c), \epsilon)$.

■

Example 17: If a function f is one-one and strictly increasing, show that f^{-1} exists and is strictly increasing[3] **(2003)**

SOLUTION: ওই আগের অংকের ভুলটাই আবার করেছে। বলে দেওয়া উচিত ছিল যে f হল continuous. সেটা বলা থাকলে আগের অংকের step 2 পর্যন্ত করে গেলেই হবে। তাছাড়াও "one-one" বলাটা এখানে অনাবশ্যক, কারণ strictly increasing function মাত্রেই one-one হয়, সেটা আবার আলাদা করে লেখার দরকার ছিল না। ■

নীচের অংকটা দেখতে অদ্ভুত লাগতে পারে, কিন্তু গ্রাফ এঁকে দেখলে আর কঠিন লাগার কথা নয়।

Exercise 24: If $f(0) = 0$, $f(1) = 3$ and $f(3) = -1$ for some continuous function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, then show that the set

$$f^{-1}(\{2\}) = \{x \ : \ f(x) = 2\}$$

has at least two distinct elements in it. ■

DAY 3
Continuity on $[a, b]$

আমরা জানি যে $f : A \to B$ যদি একটা function হয় তবে $f(A)$ হল image of f. অনেক সময়ে A-র বিভিন্ন ধর্ম $f(A)$-এর মধ্যেও সংক্রামিত হয়। আমরা এখানে দেখব যে, A যদি একটা closed, bounded interval হয়, আর $f(x)$ হয় continuous, তবে $f(A)$-ও একটা closed, bounded interval হতে বাধ্য। এই কথাটা পরে নানা কাজে লাগবে। প্রথমে চট্ করে মনে করে নিই closed, bounded interval-রা কিরকম দেখতে। Interval মানে হল $\mathbb{R}$-এর "একটানা" কোনো subset, যার মাঝে কোনো ফাঁক নেই, যেমন $(0, 1)$ বা $[0, 1)$ বা $[100, 200]$ বা $(-\infty, 3)$ এই রকম।

Exercise 25: এদের মধ্যে একটাই খালি interval, কোনটা?
(1) $\{0, 1, 2\}$ **(2)** $(0, 1) \cup (1, 2)$ **(3)** $\{10\}$. ■

সব interval-ই closed নয়, যেমন $(0, \infty)$ বা $(0, 1)$ বা $[0, 1)$ এরা কেউ closed নয়। কিছু closed interval-এর উদাহরণ হল $[0, 1], (-\infty, 4], [0, \infty)$. এদের মধ্যে $(-\infty, 4]$ আর $[0, \infty)$ আবার bounded নয়। সুতরাং সব মিলিয়ে দাঁড়ালো-- closed, bounded interval-রা দেখতে হয় $[a, b]$-র মত, যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$ এবং $a \leq b$.
এবার দেখি continuous function-দের বেলায় এদের image সম্বন্ধে কি বলা যায়। প্রথমে খালি interval-দের নিয়ে কাজ করি (closed, bounded ভুলে গিয়ে)।

Example 18: ধরো A হল যেকোনো একটা interval, যেমন হতে পারে $A = (0, 1)$ বা $[0, 2]$ বা $[0, \infty)$.

$f : A \to \mathbb{R}$ হল যে কোনো একটা continuous function. তাহলে কি $f(A) = (1, 3) \cup (5, 7)$ কখনো হতে পারে?
SOLUTION: না, কারণ $(1, 3) \cup (5, 7)$ set-টার মধ্যে একটা ফাঁক আছে। এই ফাঁকের দুই দিকে দুটো point নাও set-এর মধ্যে, ধরো 2 আর 6. যদি সত্যিই $f(A) = (1, 3) \cup (5, 7)$ হত তবে আমরা এমন $a, b \in A$ পেতাম যাতে $f(a) = 2$ আর $f(b) = 6$ হয়। এইবার ফাঁকের মধ্যে যা খুশী একটা point নাও, যেমন 4. তাহলে intermediate value theorem বলছে যে, এমন একটা $c \in (a, b)$ আছে যাতে $f(c) = 4$ হয়। (যেহেতু A একটা interval, সুতরাং $c \in A$ হবেই, তাই $f(c)$-র defined হওয়া নিয়ে কোনো দুশ্চিন্তা নেই।) কিন্তু সেটা তো হতে পারে না, কারণ $4 \notin (1, 3) \cup (5, 7) = f(A)$. ■

তার মানে intermediate value theorem বলছে যে একটা continuous function-এর domain-এ যদি কোনো ফাঁক না থাকে তবে image-এও কোনো ফাঁক থাকতে পারে না, অর্থাৎ continuous function-দের বেলায় interval-দের image খালি interval-ই হবে।
একই কথা কি closed set-এর ক্ষেত্রেও বলা যায়? মানে continuous function-দের ক্ষেত্রে closed set-এর image সর্বদা closed হতে বাধ্য? উত্তর হল--না। যেমন $f(x) = e^x$ একটা continuous function (Fig 28). যদি $A = \mathbb{R}$ নিই তবে সেটা closed. কিন্তু $f(A) = (0, \infty)$, যেটা মোটেই closed নয়।
আচ্ছা, bounded set-এর ক্ষেত্রে কি হয়? ওদের image কি যে কোনো continuous function-এর বেলাতেই bounded হবে? এবারও উত্তর--না। একটা counterexample হল $f(x) = \tan x$. Fig 29 দ্যাখো। যদি $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ নিই তবে A অবশ্যই bounded, কিন্তু $f(A) = \mathbb{R}$, যেটা মোটেই bounded নয়।
কিন্তু মজার কথা হল, যদি একটা set A একই সঙ্গে closed এবং bounded হয়, তবে কিন্তু $f(A)$-ও closed, bounded হবে, যদি $f(x)$ হয় continuous!
এই কথাটা এত গুরুত্বপূর্ণ যে, $\mathbb{R}$-এর closed, bounded subset-দের একটা আলাদা নামই আছে--compact.
আমরা এখানে কোনো set $A \subseteq \mathbb{R}$-এর তিনটে বৈশিষ্ট্য নিয়ে মাথা ঘামাচ্ছি-- closed হওয়া, bounded হওয়া আর interval হওয়া।

Exercise 26: ধরো $f(x) = e^{-x}$, যেটা একটা continuous function. Fig 30 দ্যাখো। একটা উদাহরণ দিয়ে দেখাও যে, $A \subseteq \mathbb{R}$ যদি closed interval হয়, তাও $f(A)$ কিন্তু closed interval নাই হতে পারে। ■

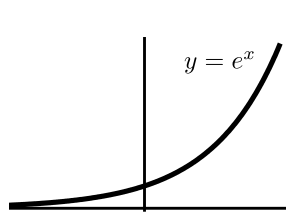
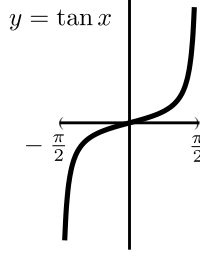
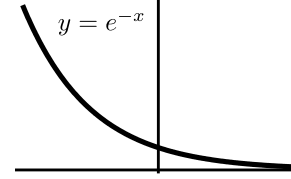



Fig 28 **Fig 29** **Fig 30**

Exercise 27: ধরো $f(x) = \frac{1}{x}$, যেটা $x \neq 0$ হলে continuous. উদাহরণ দিয়ে দেখাও যে, $A \subseteq \mathbb{R}$ যদি bounded interval হলেও $f(A)$ কিন্তু bounded interval নাও হতে পারে। ■

যা যা বললাম সেগুলো এবার আমরা একে একে প্রমাণ করব।

3.1 Closed interval

প্রথমে দেখাব যে f যদি continuous হয় তবে $f([a, b])$ হবে একটা closed interval.

Example 19: Show that the image of a closed interval under a continuous function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a closed interval.[4] **(2003)**

SOLUTION: এই অংকটায় একটু ভুল আছে। এখানে ধরে নিতে হবে যে closed interval-টা bounded-ও বটে। সুতরাং দাঁড়ালো--

> Let $[a, b]$ be a closed bounded interval. Let $D = \{f(x) : x \in [a, b]\}$.
> Shall show that D is a closed interval.

দুই ধাপে করব। প্রথমে দেখাব যে D একটা interval. এখানে একটু ভেবে নেওয়া যাক যে interval মানে ঠিক কি। সহজ ভাষায় interval মানে $\mathbb{R}$-এর একটানা একটা অংশ। এই "একটানা" ব্যাপারটা গুরুত্বপূর্ণ। এটাকে অংকের ভাষায় লিখলে হবে--

$$\forall p \leq q \in D \quad \forall r \in [p, q] \quad r \in D.$$

অর্থাৎ D-এর মধ্যে যে কোনো দুটো বিন্দু $p < q$ নিলে, তাদের মাঝখানের যে কোনো বিন্দু r-ও D-এর মধ্যেই থাকবে। যদি না থাকত তবে D-এর মাঝখানে একটা ফুটো হয়ে যেত, সেটা আর "একটানা" থাকত না।
প্রথম ধাপে দেখাবো--

> Step 1: Shall show that D is an interval,
> *i.e.*,
> $\forall p, q \in D \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad [p \leq r \leq q \implies r \in D]$.

প্রথমে অনেকগুলো $\forall$ আছে, তাই--

$\boxed{\forall p, q, r}$ Take any $p \leq q \in D$ and $r \in \mathbb{R}$ with $p \leq r \leq q$.

এবার দেখাতে হবে $r \in D$.

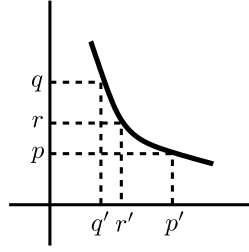



Fig 31

> $\because p, q \in D$,
> $\therefore f(p') = p$ and $f(q') = q$ for some $p', q' \in [a, b]$.

Fig 31 দ্যাখো।

> Then by intermediate value theorem we know that $\exists r'$ between p' and q' such that $f(r') = r$.
> $\therefore r \in D$, as required.

দ্বিতীয় ধাপে দেখাবো--

> Step 2: Shall show D is closed,

কোনো set-কে closed দেখানোর দুটো কায়দা আমরা জানি। এক হল তার complement-কে open দেখানো। আর দুই হল এটা দেখানো যে set-টার সব limit point-ই set-টার ভিতরেই আছে। আমরা এখানে দ্বিতীয় পথটা নেব, কারণ তাতে প্রমাণটা একটু সংক্ষেপে লেখা যাবে।

> *i.e.*, $D' \subseteq D$.
> Take any $\ell \in D'$.

আমরা দেখাব যে $\ell \in D$, মানে ℓ-কে $f(L)$ আকারে লেখা যাবে, যেখানে L হল $[a, b]$-এর ভিতর কোনো সংখ্যা। আমরা প্রথমে এরকম একটা $L \in [a, b]$ তৈরী করব, তারপর দেখাব যে $f(L) = \ell$ হয়।

> Then we can take a sequence $\{d_n\}_n \subseteq D$ such that $d_n \to \ell$.
> $\because d_n \in D$,
> $\therefore d_n = f(d'_n)$ for some $d'_n \in [a, b]$.

এইবার আমরা একটা কৌশল করব, Bolzano-Weierstrass theorem লাগাব--

> $\because \{d'_n\}_n \subseteq [a, b]$
> $\therefore \{d'_n\}_n$ is bounded.
> $\therefore$ By Bolzano-Weierstrass, there is a convergent subsequence $\{d'_{n_k}\}_k$ such

that $d'_{n_k} \to L$ for some $L \in \mathbb{R}$.

মনে রেখো যে আমাদের উদ্দেশ্য $\ell = f(L)$ দেখানো। কিন্তু তার আগে জানা দরকার যে $f(L)$ আদৌ exist করে কি না, মানে Lটা f-এর domain $[a, b]$-র মধ্যে পড়ে কি না--

Then L is a limit point of $[a, b]$.
$\because [a, b]$ is closed, $\therefore L \in [a, b]$.
Also, $\because f$ is continuous, $\therefore f(d'_{n_k}) \to f(L)$.
$\therefore \ell = f(L)$.
$\therefore \ell \in D$, as required.

■

3.2 Bounded

দেখালাম যে, f যদি continuous হয় তবে $f([a, b])$ হয় একটা closed interval. এবার দেখাব যে $f([a, b])$ হবে bounded, বা আরেকভাবে বললে, $f(x)$ is bounded on $[a, b]$.

Example 20: If $f(x)$ is continuous in a closed interval $[a, b]$, prove that $f(x)$ is bounded in $[a, b]$. Is the converse true? Justify your answer.[3+1] **(2006,2012)**

SOLUTION:

Let, if possible, $f(x)$ be unbounded on $[a, b]$

Fig 32-এ দেখিয়েছি তবে ব্যাপারটা কি রকম হত। এখানে গ্রাফটাকে unbounded above করে এঁকেছি। তুমি যেখানেই একটা horizontal লাইন টানো না কেন (যেমন ড্যাশ্ ড্যাশ্ দিয়ে দেখানো হয়েছে), গ্রাফটা তারও উপরে মাথা তুলবে। প্রথম ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনটা এঁকেছি $y = 1$ দিয়ে। এর চেয়ে উপরে গ্রাফের একটা point নিয়েছি $x = x_1$-এ। পরের লাইনটা $y = 2$-তে, এর চেয়েও উপরেও একটা point নিয়েছি $x = x_2$-তে। এইভাবে $x_3, x_4, \ldots$ নিতে থাকব--

Then $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a, b] \quad |f(x_n)| > n$.
$\because \{x_n\}_n \subseteq [a, b]$, $\therefore \{x_n\}_n$ is bounded.
$\therefore$ By Bolzano-Weierstrass,

$$\exists \{x_{n_k}\}_k \subseteq \{x_n\}_n \quad x_{n_k} \to L$$

Fig 32

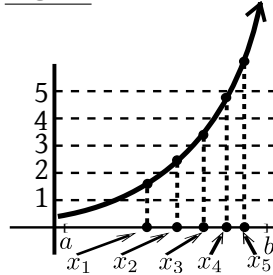
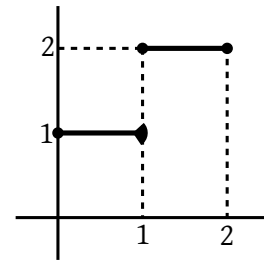



Fig 33

> for some $L \in \mathbb{R}$.

আমরা এবার বলতে যাচ্ছি যে $f(x_{n_k}) \to f(L)$. খালি তার আগে দেখানো দরকার যে $f(L)$-টা exist করে, মানে L আছে f-এর domain $[a, b]$-র মধ্যে--

> Then L is a limit point of $[a, b]$.
> $\because [a, b]$ is closed, $\therefore L \in [a, b]$.
> So $f(L)$ exists.
> $\because f$ is continuous on $[a, b]$ so $f(x_{n_k}) \to f(L)$.
> But by construction $|f(x_{n_k})| > n_k \to \infty (\Rightarrow\Leftarrow)$.

এবার দ্বিতীয় অংশ। প্রথমে লিখে নিই converse statement-টা কি--

> Converse statement:
> "If $f(x)$ is bounded on a closed interval $[a, b]$ then it must be continuous."

এ কথাটা মোটেই ঠিক নয়। সেটা স্পষ্ট করে লিখে নিই, তারপর একটা counterexample দেব।

> This is false.
> Counterexample: We can take $a = 0, b = 2$ and
>
> $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [0, 1) \\ 2 & \text{if } x \in [1, 2] \end{cases}$$
>
> Then f is bounded but not continuous on $[a, b]$.

Fig 33-এ গ্রাফটা দেখানো হয়েছে। ■

Example 21: If a real valued function f is continuous on a closed interval $a \le x \le b$, then show that f is bounded on $a \le x \le b$. Show by an example that a continuous function in an open interval may not be bounded therein.[4] **(1999)**

SOLUTION: প্রথম অংশটা তো আগের অংকেই করেছি। খালি দ্বিতীয় অংশটা নীচে করলাম।

> Consider $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ defined as
>
> $$f(x) = 1/x$$
>
> Then f is not bounded on $(0, 1)$ because $f(x) \to \infty$ as $x \to 0+$.

গ্রাফটা Fig 34-এ দেখানো হয়েছে। ■

Exercise 28: If $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is continuous at $c \in (a, b)$ and $f(c) > 0$ show that there exists a neighbourhood N of c and a $\lambda > 0$ such that $0 < f(x) < \lambda$ for all $x \in N$. What happens if $f(c) = 0$?[5+1] **(2013.5a)**

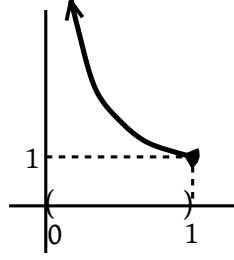



Fig 34

HINT:
এই অংকটা বস্তুতঃ আগের দুটো অংক মিলিয়ে তৈরী তাই নতুন করে বলার কিছু নেই, খালি মূল কায়দাটা বলি। প্রথমে তোমাকে sign-preserving property লাগাতে হবে। তার ফলে একটা neighbourhood পাবে $N(c,\delta) \subseteq (a,b)$ যার উপরে $f(x) > 0$ হবে। এবার খালি $\left[c-\frac{\delta}{2}, c+\frac{\delta}{2}\right]$-এর দিকে তাকাও। এটা যেহেতু $N(c,\delta)$-র ভিতরে আছে, তাই এখানেও $f(x) > 0$ হবে। কিন্তু বাড়তি সুবিধা হল এটা আবার closed, bounded-ও বটে। সুতরাং এর উপরে f-টা bounded-ও হবে। ধরো $M > 0$ হল একটা bound. তার মানে $\left[c-\frac{\delta}{2}, c+\frac{\delta}{2}\right]$-এর মধ্যে সর্বত্রই $f(x) \leq M$ হবে। অংকটায় $f(x) < \lambda$ দেখাতে বলেছে, $\leq$ থেকে $<$ পাওয়ার জন্য λ-টাকে M-এর চেয়ে একটু বাড়িয়ে দিই, ধরো $\lambda = M + 1$.
আমাদের একটা neighbourhood নিতে বলেছিল N. আমরা কি $N = \left[c-\frac{\delta}{2}, c+\frac{\delta}{2}\right]$ নেব? না, কারণ neighbourhood বলতে একটা open set বোঝায়, সুতরাং আমরা নেব $N = \left(c-\frac{\delta}{2}, c+\frac{\delta}{2}\right)$. এটা যেহেতু $\left[c-\frac{\delta}{2}, c+\frac{\delta}{2}\right]$-এর একটা subset, সুতরাং এর মধ্যেও সর্বত্র $0 < f(x) < \lambda$ হবে।
এই অংকের দ্বিতীয় অংশে $f(c) = 0$ দিয়েছে। সুতরাং sign-preserving property লাগানো যাবে না। অতএব $f(x) > 0$ অংশটুকু বাদ যাবে। কিন্তু bounded দেখানোতে তো আর $f(c)$ কোথাও লাগে নি, ফলে ওই অংশটা অপরিবর্তিত থাকবে--

> Second part:
>
> If $f(c) = 0$, then there is a neighbourhood N of c inside (a,b), and a number $\lambda > 0$ such that
> $$\forall x \in N \quad f(x) < \lambda.$$

■

3.3 Max/min property

আমরা জানি যে $(0,1)$ set-টা bounded হলেও এর কোনো maximum element নেই। এখানে 1 হল supremum, কিন্তু যেহেতু $1 \notin (0,1)$ তাই 1-কে maximum বলা যাচ্ছে না। কিন্তু $[0,1]$ যেহেতু একটা closed, bounded nonempty set, তাই এর maximum আর minimum দুটোই আছে। এবার এই একই জিনিস আমরা একটু অন্যভাবে দেখব, function দিয়ে।

Example 22: ধরো $f : (1,2) \to \mathbb{R}$ হল $f(x) = 2x$. বল তো $f(x)$-এর কি কোনো maximum বা minimum value আছে?

SOLUTION:
Fig 35 দেখলেই বুঝবে যে $f(x)$-এর image হল $(2,4)$. যেহেতু এর কোনো minimum বা maximum element নেই, তাই $f(x)$-এরও কোনো maximum বা minimum নেই। ■

এবার যদি একটা closed, bounded (nonempty) set নিই D, এবং একটা continuous function $f : D \to \mathbb{R}$ নিই তবে আমরা আগেই দেখেছি যে $f(D)$-ও closed আর bounded হবে (আর nonempty তো বটেই!)। সুতরাং $f(D)$-র মধ্যে maximum এবং minimum element থাকবেই, অর্থাৎ $f(x)$-এরও maximum এবং minimum থাকবে।

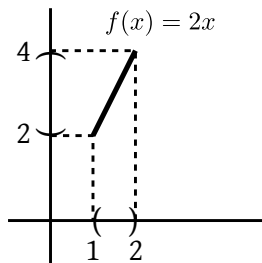



Fig 35

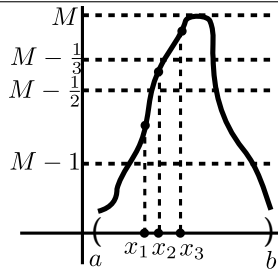



Fig 36

নীচের অংকে আমরা এটাই বিশদভাবে দেখাব।

Example 23: Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be continuous on $[a, b]$ Assuming that f is bounded on $[a, b]$, show that f attains its bounds on $[a, b]$.[4] **(2003)**

SOLUTION: প্রথমে দেখি f সবচেয়ে কত উপরে উঠতে পারে, আর কত নীচে নামতে পারে। এ থেকে দুটো bound পাব, upper আর lower.

Step 1: Define

$$A = \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

Then $A \neq \phi$, since $f(a) \in A$.

Also, since f is assumed bounded, so A is bounded.

So $\sup A$ and $\inf A$ both exist. Call them M and m, respectively.

এই হল আমাদের bound দুটো-- M আর m. এবার দেখাব যে f এই দুটো bound-কে attain করে, মানে এমন $L, K \in [a, b]$ আছে যাতে $f(L) = M$ আর $f(K) = m$ হয়।

Step 2: Shall show that $\exists L \in [a, b]$ such that $f(L) = M$.

প্রথম কাজ হল একটা উপযুক্ত L পাওয়া। Fig 36 দ্যাখো।

$\because M = \sup A$,

$$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a, b] \quad f(x_n) > M - \frac{1}{n}.$$

এটা পেলাম সরাসরি supremum-এর সংজ্ঞা থেকে।

$\because \{x_n\}_n \subseteq [a, b]$ is a bounded sequence.

$\therefore$ By Bolzano-Weierstrass,

$$\exists \{x_{n_k}\}_k \subseteq \{x_n\}_n \quad x_{n_k} \to L$$

for some L.

$\boxed{\exists L}$ Choose this L.

এই আমাদের L. এবার দেখাব যে $f(L) = M$. তার জন্য আগে দেখাব যে $f(L)$ আদৌ exist করে, অর্থাৎ L আছে f-এর domain $[a, b]$-র ভিতরে--

> Then L is a limit point of $[a, b]$.
> $\because [a, b]$ is closed, $\therefore L \in [a, b]$.
> Shall show $f(L) = M$.
> $\because x_{n_k} \to L$ and f is continuous,
> $\therefore f(x_{n_k}) \to f(L)$.
> Now, by construction,
> $$\underbrace{M - \frac{1}{n_k}}_{\to M} < f(x_{n_k}) \leq M$$
> So as $k \to \infty$, we have $f(x_{n_k}) \to M$.
> But $f(x_{n_k}) \to f(L)$, also. So $f(L) = M$, as required.

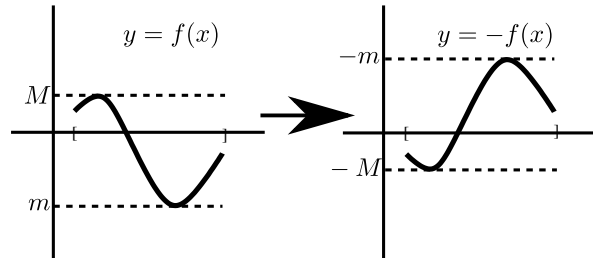
এখনও কিন্তু অংকটা শেষ হয় নি, কারণ আমরা দেখাই নি যে $\exists K \in [a, b] \quad f(K) = m$. কিন্তু সেটার প্রমাণটা আর আলাদা করে করার দরকার নেই, কারণ f-এর জায়গায় যদি $-f$ নিয়ে কাজ করি তবেই $-m$-টা হয়ে যাবে supremum, (Fig 37) সুতরাং এক্ষুণি যা প্রমাণ করলাম, তা থেকেই পাব যে এমন $K \in [a, b]$ আছে যাতে $-f(K) = -m$ হয়, মানে $f(K) = m$ হয়।

> Step 3: Applying the above argument to $-f$ we see $\exists K \in [a, b]$ such that $-f(K) = -m$, or $f(K) = m$.

■

Exercise 29: If a real valued function f is continuous on a closed interval $a \leq x \leq b$, then show that f is bounded on that interval. If M is the least upper bound of f then prove that there exists at least one point α in $[a, b]$ such that $f(\alpha) = M$.[3+2] **(2001)**
HINT:
আগের অংকটাই। খালি upper bound অংশটুকু করতে দিয়েছে। তাই আগের সমাধানটার step 2 পর্যন্ত করলেই হবে। ■

Exercise 30: Let f be continuous on a closed interval $[a, b]$ Assuming boundedness of f on $[a, b]$ show that f attains its bounds on $[a, b]$. **(1997)**
HINT:

Fig 37

?? নম্বর অংকটাই আরেকরূপে দিয়েছে। ■

DAY 4
Uniform continuity

ধরো $f: I \to \mathbb{R}$ একটা function, যেখানে $I \subseteq \mathbb{R}$. আমরা $f(x)$-কে $x = a$-তে continuous কখন বলি? যখন--

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in N(a, \delta) \cap I \ \ f(x) \in N(f(a), \epsilon).$$

আর $f(x)$-কে পুরো I-এর উপরেই continuous বলব যদি $f(x)$ সব $x = a$-তেই continuous হয়, মানে যদি গোড়ায় একটা $\forall a \in I$ লাগিয়ে দিই--

$$\forall a \in I \ \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in N(a, \delta) \cap I \ \ f(x) \in N(f(a), \epsilon).$$

আমরা প্রথম অধ্যায়ে শিখেছিলাম যে দুটো পরপর $\forall$-কে আগেপরে করা যায়, তাতে অর্থের কোনো পরিবর্তন হয় না। তাই এভাবেও লিখতে পারি--

$$\forall \epsilon > 0 \ \forall a \in I \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in N(a, \delta) \cap I \ \ f(x) \in N(f(a), \epsilon).$$

লক্ষ কর যে $\exists\delta$-টা আছে "$\forall\epsilon$" এবং "$\forall a$"-র পরে। তার মানে δ-টা ϵ আর a দুজনের উপরেই নির্ভর করতে পারে। এই নির্ভরতাটা আমরা গ্রাফ থেকে সহজেই দেখতে পাই। সপ্তম অধ্যায়ে কিভাবে আমরা কোনো a আর ϵ দেওয়া থাকলে তা থেকে গ্রাফ ব্যবহার করে δ বার করা শিখেছিলাম, মনে আছে? Fig 38-এ এরকম একটা গ্রাফ দিয়েছি। লক্ষ কর বিভিন্ন a_2-তে গ্রাফটা a_1-র চেয়ে বেশী খাড়া, তাই a_1-এ যে δ-তে কাজ চলছে, a_2-তে তার চেয়ে ছোটো δ লাগছে (একই ϵ-এর জন্য)। কোনো কোনো function-এর ক্ষেত্রে কিন্তু একটা δ দিয়েই সব a-র জন্য কাজ চলে যায়, অর্থাৎ δ খালি ϵ-এর উপরেই নির্ভর করে, a-র উপরে নয়। এই সব function-কে বলে **uniformly continuous.** একটা সহজ uniformly continuous function হল $f(x) = x$. Fig 39-এর গ্রাফটা দেখেই বুঝতে পারা উচিত যে কেন একই δ দিয়ে সব জায়গায় কাজ চলবে (এখানে $\delta = \epsilon$ নিলেই হয়)।
অংকের ভাষায় definition-টা হবে এইরকম--

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall a \in I \ \forall x \in N(a, \delta) \ \ f(x) \in N(f(a), \epsilon). \qquad (*)$$

লক্ষ কর "$\exists\delta$" কি রকম এখন "$\forall a$"-র আগে চলে গেছে। এরকম একটা উদাহরণ আমরা প্রথম অধ্যায়ে দেখেছিলাম, মনে আছে? সব মেয়েই কোনো না কোনো কুকুর ভালোবাসে--

$$\forall g \in \text{GIRL} \quad \exists d \in \text{DOG} \quad g \text{ loves } d$$

Fig 38

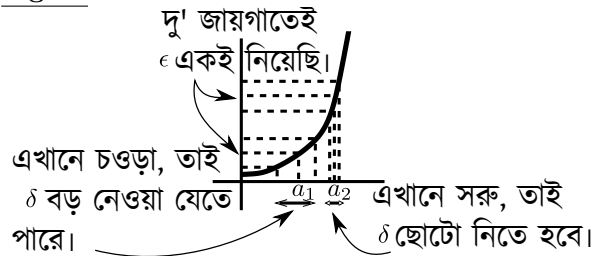
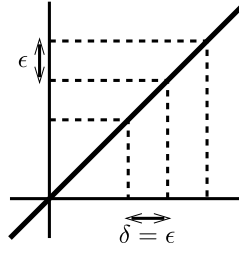



Fig 39

বনাম--

$$\exists d \in \text{DOG} \quad \forall g \in \text{GIRL} \quad g \text{ loves } d,$$

এমন একটা কুকুর আছে যাকে সব মেয়েই ভালোবাসে! দ্বিতীয় বাক্যটা প্রথমটার চেয়ে stronger, অর্থাৎ দ্বিতীয়টা যদি সত্য হয় তবে প্রথমটাও সত্যি হতে বাধ্য। এখানেও একইভাবে uniform continuity হল এমনি continuity-র চেয়ে stronger. (*)-টাকেই একটু সুন্দর করে সাজিয়ে লিখব নীচের প্রশ্নটার উত্তরে--

Example 24: Let f be a real valued function defined on an interval I. When is f is said to be uniformly continuous on I? [1] **(2005,2001)**

SOLUTION:

DEFINITION: **Uniform continuity**

Let $I \subseteq \mathbb{R}$, and $f : I \to \mathbb{R}$ be any function. We say that f is <u>uniformly continuous on I</u> if

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall a, b \in I$$
$$(|a - b| < \delta \implies |f(a) - f(b)| < \epsilon).$$

■

একটু অন্যভাবে লেখা হলেও, এটা আর (*) আসলে একই। সেখানে লিখেছিলাম "$\forall a \in I \quad \forall x \in N(a, \delta) \cap I$", আর এখানে x-টাকে b লিখেছি আর দুটো $\forall$-কে জুড়ে দিয়ে পেয়েছি--"$\forall a, b \in I$ যেখানে $|a - b| < \delta$"। আর মনে আছে নিশ্চয়ই যে "$b \in N(a, \delta)$" মানে "$|a - b| < \delta$."

4.1 গ্রাফ দেখে বোঝা

একটা function-এর গ্রাফ দেখে যেমন বোঝা যায় সেটা continuous কিনা, তেমনি বোঝা যায় সেটা uniform continuous কিনা। তার একটা কায়দা আছে। বোঝার জন্য Fig 40 দ্যাখো। এখানে একটা $\epsilon > 0$ দেওয়া আছে, এবং তার জন্য একটা $\delta > 0$-ও বার করে দেখানো হয়েছে। এর ফলে একটা rectangle-এর সৃষ্টি হয়েছে যার উচ্চতা হল 2ϵ আর চওড়া হল 2δ. এইবার একটু কল্পনার আশ্রয় নিতে হবে। মনে কর যে গ্রাফটা একটা লোহার তার দিয়ে তৈরী, আর এই rectangle-টা আসলে একটা চওড়া আংটি (দরজিরা সূঁচের খোঁচা আটকানোর জন্য আঙুলে যে জিনিসটা পরেন, সেটা আরও ভালো উপমা)। Fig 41 দ্যাখো। একটা ϵ দেওয়া থাকলে তার উপযুক্ত δ পাওয়া মানে এমন একটা আংটি নেওয়া যার মধ্যে দিয়ে গ্রাফটা দিব্যি গলে যায় (আংটিটাকে হেলালে চলবে না কিন্তু!) ঠাণ্ডা মাথায় ভেবে দ্যাখো এই কথাটা বুঝলে কি না! এইটা ছিল continuity-র

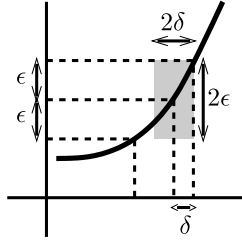
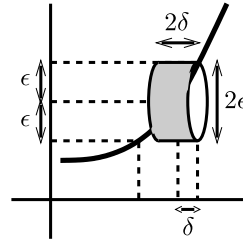



Fig 40 **Fig 41**

definition. এবার uniform continuity বলছে যে একই δ দিয়ে সর্বত্রই কাজ চলবে, তার মানে আংটিটাকে পুরো গ্রাফটার উপর দিয়ে স্বচ্ছন্দে বুলিয়ে নেওয়া যাবে, কোথাও বেঁধে যাবে না (আংটিটাকে কিন্তু হেলালে চলবে না)। যদি যেকোনো $\epsilon > 0$-র জন্যই এরকম আংটি পাওয়া যায়, তবেই uniform continuity পাব।

Example 25: Fig 42-তে $f(x) = \sqrt{x}$-এর গ্রাফ দেখে বল ওটা uniformly continuous কিনা।

SOLUTION: একটা আংটি যদি পুরো গ্রাফের উপর দিয়ে বুলিয়ে নিই (Fig 43), তবে সেটা বেঁধে যাবার সবচেয়ে সম্ভাবনা গ্রাফের সবচেয়ে খাড়া অংশটাতে। এখানে সব চেয়ে খাড়া অংশটা হল একেবারে বাঁ প্রান্তে, সেখান থেকে যত ডানদিকে যাচ্ছে গ্রাফটা ততই সমতল হয়ে আসছে। সুতরাং যাই $\epsilon > 0$ দেওয়া হবে, যদি সেই radius-এর এমন একটা আংটি বানাই যেটা গ্রাফটার বাঁ প্রান্তে ঠিকঠাক ফিট করে, তবে আর কোথাও ঝামেলা হতে পারে না। তার মানে $\sqrt{2\delta} \leq 2\epsilon$ হলেই হবে, তাই $\delta = 2\epsilon^2$ নিলেই কাজ চলবে। ■

Example 26: Fig 44-এ রয়েছে $f(x) = x^2$-এর গ্রাফ $(x \in \mathbb{R})$.। ছবি দেখে কি মনে হয়, এটা কি uniformly continuous?

SOLUTION: না, লক্ষ কর গ্রাফটা ক্রমশঃই খাড়া হয়ে উঠছে, যত পাতলা করেই আংটি বানাই না কেন এক সময়ে না এক সময়ে ঠেকে যাবেই। ■

Example 27: Fig 45-এ আবার $f(x) = x^2$-এর গ্রাফ এঁকেছি, কিন্তু এবার $x \in [1, 2]$. এবার কি uniformly continuous হবে?

SOLUTION: হ্যাঁ, এবার x-কে 2-এর ওদিকে যেতে না দেওয়ায়, গ্রাফটা আর উত্তরোত্তর খাড়া হয়ে উঠতে পারছে না। এখানে সবচেয়ে খাড়া অংশটা রয়েছে ডানপ্রান্তে, সুতরাং সেইখানটা যাতে ফিট করে এইভাবে এইভাবে আংটি বানালেই সেটা গ্রাফের বাকী অংশের উপর দিয়েও স্বচ্ছন্দে বুলিয়ে নেওয়া চলবে! তার মানে $(2 - 2\delta)^2 \leq 4 - 2\epsilon$ হলেই হবে, এবং তা থেকে আমরা একটা δ বার করতে পারি। ■

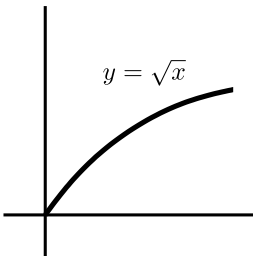



Fig 42 **Fig 43**

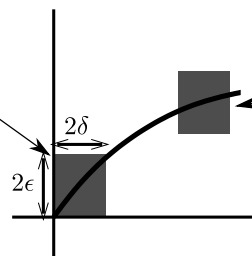
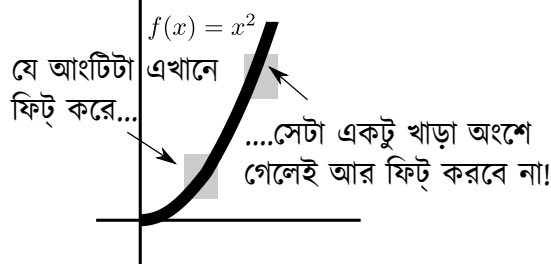
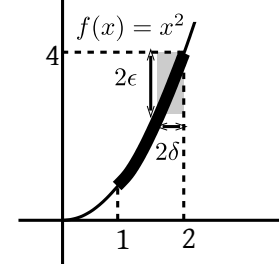



Fig 44 **Fig 45**

4.2 Using definition

এবার কিছু অংক করব যেখানে definition-টা ব্যবহার করতে হবে।

Example 28: Let f be a real-valued function defined on an interval I. If f is uniformly continuous on I, show that f is continuous on I. এর পরে অংকটার আরো কিছু অংশ আছে যেটা আমরা একটু পরে **??** নম্বর অংকে করব। [2+$\cdots$]
(2002)

SOLUTION:

Given: $f : I \to \mathbb{R}$ is uniformly continuous on I,
i.e.,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall a, b \in I$$
$$(|a - b| < \delta \implies |f(a) - f(b)| < \epsilon). \quad (*)$$

To show: f is continuous on I,
i.e.,

$\forall a \in I \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N(a, \delta) \cap I \quad f(x) \in N(f(a), \epsilon).$

$\forall a, \epsilon$ Take any $a \in I$ and any $\epsilon > 0$.

$\exists \delta$ Using this ϵ in (*) we get a $\delta > 0$.

$\forall x$ Take any $x \in N(a, \delta) \cap I$.

Then $a, x \in I$ and $|a - x| < \delta$.
$\therefore$ By (*) we have $f(x) \in N(f(a), \epsilon)$, as required.

■

এর পরের অংকটা খুবই সহজ, কিন্তু আগে একটা নতুন সংজ্ঞা শিখতে হবে--

DEFINITION: Lipschitz's condition

A function $f: I \to \mathbb{R}$ is said to satisfy Lipschitz's condition on I if

$$\exists K > 0 \quad \forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq K \cdot |x - y|.$$

K is called a Lipschitz's constant for f over I.

এই শর্তটার মানে হল f-টা খুব বেশী লাফালাফি করতে পারবে না, যদি x আর y কাছাকাছি থাকে তবে $f(x)$ আর $f(y)$-ও পরস্পরের থেকে খুব বেশী দূরে যেতে পারবে না। এতে সুবিধা এই যে x, y-এর দূরত্বকে নিয়ন্ত্রণ করলেই $f(x), f(y)$-এর দূরত্বও আপনা থেকেই নিয়ন্ত্রিত হয়ে যায়। তোমরা হায়ার সেকণ্ডারীতে differential equation দেখেছো। এক ধরণের বেয়াড়া differential equation আছে তাদের আবার একাধিক solution হয়ে যায়। এদেরকে শায়েস্তা করতেই Rudolf Lipschitz (রুডল্‌ফ্ লিপশিৎজ) প্রথম এই শর্তটা বার করেন। শর্তটা এমন সহজ দেখতে হয়েও এত মোক্ষম যে লোকে নানা জায়গায় এটা ব্যবহার করে, যেমন আমরা করব নীচের অংকে।

Example 29: Prove that a real-valued function satisfying Lipschitz's condition on an interval I is uniformly continuous there.[3] **(2012.7a)**

SOLUTION:

Let $f: I \to \mathbb{R}$ satisfy the Lipschitz's condition

$$\exists K > 0 \quad \forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq K \cdot |x - y|.$$

Shall show that f is uniformly continuous on I, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in I$$
$$\big(|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon\big).$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

আমাদের দরকার $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ করা, আর আমরা জানি $|f(x) - f(y)| \leq K \cdot |x - y|$. সুতরাং $|x - y| < \frac{\epsilon}{K}$ রাখলেই চলবে। মনে রেখো যে $K > 0$, তাই K দিয়ে ভাগ করতে অসুবিধা নেই।

$\forall\delta$ Choose $\delta = \frac{\epsilon}{K} > 0$.

$\forall x, y$ Take any $x, y \in I$ such that $|x - y| < \delta$.

Then

$$|f(x) - f(y)| \leq K \cdot |x - y| < K\delta = K \times \frac{\epsilon}{K} = \epsilon,$$

as required.

■

Example 30: Let $f: S \to \mathbb{R}, g: S \to \mathbb{R}$ be uniformly continuous and bounded on the set S.

Show that the product function fg defined by $(fg)(x) = f(x)g(x)$ for all $x \in S$ is uniformly continuous on S.[3] **(2007.2c)**

SOLUTION: দুটো uniformly continuous function-কে গুণ করলে গুণফলটা uniformly continuous নাও হতে পারে। কিন্তু যদি দুজনেই bounded হয় তবে গুণফলটাও uniformly continuous হবে। এই অংকে সেটাই দেখাতে দিয়েছে।

Given:

(1) $f : S \to \mathbb{R}$ is uniformly continuous, *i.e.*,

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, y \in S \\ (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

(2) $g : S \to \mathbb{R}$ is uniformly continuous, *i.e.*,

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, y \in S \\ (|x - y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \epsilon).$$

(3) $f, g : S \to \mathbb{R}$ are bounded, *i.e.*,

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in S \quad |f(x)|, |g(x)| < M.$$

To show: $f(x)g(x)$ is uniformly continuous on S, *i.e.*,

$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, y \in S$
$(|x - y| < \delta \implies |f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \epsilon)$.

এবার প্রমাণের শুরু--

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার একটা উপযুক্ত δ পাওয়ার জন্য একটু রাফ করে নিই। আমাদের কাজ হল $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \epsilon$ দেখানো। আমরা (1) আর (2) ব্যবহার করে $|f(x) - f(y)|$ আর $|g(x) - g(y)|$-কে যত খুশী ছোটো করতে পারি। সুতরাং $|f(x)g(x) - f(y)g(y)|$-কে আগে $|f(x) - f(y)|$ আর $|g(x) - g(y)|$ দিয়ে প্রকাশ করে নিলে সুবিধা হবে। সেইটা করা যায় এইভাবে--

$$\begin{aligned} & |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\ = \; & |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ \leq \; & |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ = \; & |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\ < \; & M|g(x) - g(y)| + M|f(x) - f(y)|, \end{aligned}$$

যেহেতু $|f(x)|, |g(x) < M$. তার মানে যদি $|f(x) - f(y)|$ আর $|g(x) - g(y)|$ দুজনকেই $\frac{\epsilon}{2M}$-এর চেয়ে ছোটো করতে পারি, তবেই $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \epsilon$ হবে।

Taking $\frac{\epsilon}{2M}$ in place of ϵ in (1) and (2), we get $\delta_1, \delta_2 > 0$ such that

$$\forall x, y \in S \quad \Big(|x-y| < \delta_1 \implies |f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{2M}\Big)$$

and

$$\forall x, y \in S \quad \Big(|x-y| < \delta_2 \implies |g(x)-g(y)| < \frac{\epsilon}{2M}\Big).$$

Choose $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

Take any $x, y \in S$ such that $|x-y| < \delta$.

এবার দেখাব যে $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \epsilon$. তার জন্য খালি রাফটাকে গুছিয়ে লিখে দেওয়ার অপেক্ষা--

Then

$$\begin{aligned}
& |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\
= \; & |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\
\le \; & |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\
= \; & |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\
< \; & M(|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|) \\
< \; & M\left(\tfrac{\epsilon}{2M} + \tfrac{\epsilon}{2M}\right) \\
= \; & \epsilon,
\end{aligned}$$

as required.

■

নীচের অংকটা সরাসরি সংজ্ঞা থেকে অতি সহজে করা যায়। এটা আমাদের শীঘ্রই কাজে লাগবে।

Exercise 31: If $f : A \to \mathbb{R}$ is uniformly continuous on A, and $B \subseteq A$, then show that f is uniformly continuous on B also. ■

4.3 Continuity on $[a, b]$ (আবার!)

আমরা আগের দিন closed, bounded set-এর উপর continuous function-দের বিভিন্ন ধর্ম আলোচনা করেছিলাম। আজকে আরও একটা ধর্ম যোগ হবে--যদি D একটা closed, bounded set হয় আর $f : D \to \mathbb{R}$ হয় continuous, তবে $f(x)$ অবশ্যই D-এর উপর uniformly continuous হতে বাধ্য। এর জন্য D একটা interval না হলেও চলবে। এইটা একটা খুবই গুরুত্বপূর্ণ theorem.

THEOREM

If $f : D \to \mathbb{R}$ is continuous where $D \subseteq \mathbb{R}$ is closed and bounded, then f must be uniformly continuous on D.

এর প্রমাণটাই হল নীচের অংকের সমাধান।

Example 31: Show that a continuous function defined on a closed and bounded interval is uniformly continuous on that interval.[4] **(2011.7c)**
SOLUTION: এখানে interval কথাটার কোনো দরকার নেই। যেকোনো closed, bounded set-এই চলত।

> Let $D \subseteq \mathbb{R}$ be closed, bounded.
> Let $f : D \to \mathbb{R}$ be a continuous function.
> Shall show: f is uniformly continuous on D.

আমরা contradiction ব্যবহার করব।

> Let, if possible, this be false.
> Then
> $$\exists \epsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists a, b \in D \quad |a - b| < \delta \text{ but } |f(a) - f(b)| \geq \epsilon. \quad (*)$$

এটা পেয়েছি uniform continuity-র সংজ্ঞার negation নিয়ে।

> Then, $\forall n \in \mathbb{N}$, we take $\delta = \frac{1}{n} > 0$ to get $a_n, b_n \in D$ such that
> $$|a_n - b_n| < \frac{1}{n} \text{ but } |f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon.$$

দুটো sequence পাওয়া গেল $\{a_n\}_n$ আর $\{b_n\}_n$. এবার আমরা Bolzano-Weierstrass theorem লাগিয়ে দুটো থেকেই এমন subsequence বার করব, যাতে এদের একই limit হয়। নীচের ধাপগুলো ধীরে ধীরে খুঁটিয়ে পড়।

> $\because \{a_n\}_n \subseteq D \therefore \{a_n\}_n$ is bounded.
> $\therefore$ By Bolzano-Weierstrass,
> $$\exists \{a_{n_k}\}_k \subseteq \{a_n\}_n \quad a_{n_k} \to L,$$
> for some $L \in \mathbb{R}$.

এদিকে $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$, মানে b_n-গুলো ক্রমশঃই a_n-দের কাছে যাচ্ছে। সুতরাং a_{n_k}-রা যদি L-এ যায়, তবে b_{n_k}-গুলোও যে তাদের পিছন পিছন L-এ গিয়ে জুটবে এতে আর আশ্চর্য কি আছে? এখানে b_{n_k} মানে হল a_{n_k}-এর সঙ্গে তাল মিলিয়ে $\{b_n\}_n$-এর subsequence-টা। যেমন a_{n_k}-রা যদি হয়

$$a_3, a_6, a_9, ...,$$

তবে b_{n_k}-রা হবে

$$b_3, b_6, b_9, ...$$

$\because |a_n - b_n| < \frac{1}{n}$,
$\because |a_{n_k} - b_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \to 0$.
So $b_{n_k} \to L$.

এইখানে যে ছোট্টো করে একটু triangle inequality লাগিয়ে দিলাম বুঝলে তো?

$$|b_{n-k} - L| \leq |b_{n_k} - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| \leq \frac{1}{n_k} + |a_{n_k} - L|.$$

এখানে $\frac{1}{a_{n_k}} \to 0$ কারণ subsequence-এর সংজ্ঞা অনুযায়ী $n_k \to \infty$. আর $a_{n_k} \to L$ তো ছিলই।
এবার আমরা দাবী করতে যাচ্ছি যে $f(a_{n_k}) \to f(L)$ আর $f(b_{n_k}) \to f(L)$. কিন্তু তার জন্য আগে দেখাতে হবে যে $f(L)$ আদৌ exist করে, মানে L আছে f-এর domain D-এর মধ্যে--

Now $L \in D'$.
$\because D$ is closed, $\therefore L \in D$.
So by continuity of f we have

$$f(a_{n_{k_l}}) \to f(L) \text{ and } f(b_{n_{k_l}}) \to f(L).$$

Hence

$$f(a_{n_{k_l}}) - f(b_{n_{k_l}}) \to 0,$$

which contradicts (*), completing the proof.

■

Exercise 32: If $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is continuous on $[a, b]$, prove that f is uniformly continuous on $[a, b]$.[4] **(2013.6b)**
HINT:
আগের অংকটাই। ■

Example 32: If I is a closed interval and f is continuous on I, show that f is uniformly continuous on I.[4] **(2005)**
SOLUTION: ভুল অংক, bounded বলতে ভুলে গেছে! খালি closed interval হলেই চলবে না। যেমন $f(x) = x^2$ function-টা $[0, \infty)$ এই closed interval-এর উপরে continuous, কিন্তু মোটেই uniformly continuous নয়! এখানে $[0, \infty)$ ছিল unbounded. ■

4.4 Sequential criterion

যদি কোনো একটা function $f : I \to \mathbb{R}$ দিয়ে তোমায় দেখাতে বলে সেটা uniformly continuous নয়, তবে সাধারণতঃ সরাসরি definition ব্যবহার না করে uniform continuity-র sequential criterion ব্যবহার করা সহজ হয়।
মনে আছে আশা করি যে সাধারণ continuity-র ক্ষেত্রে sequential criterion ছিল এইরকম--

> ধর $f(x)$ একটা function. আর a একটা সংখ্যা। ধর $\{x_n\}_n$ এমন একটা sequence যাতে $x_n \to a$ হয়। যদি $f(x)$ function-টা $x = a$-তে continuous হয়, তবে $f(x_n) \to f(a)$ হতে বাধ্য। এর converse-টাও ঠিক।

ঠিক একইরকম একটা sequential criterion আছে uniform continuity-র ক্ষেত্রেও--

> ধর $f : D \to \mathbb{R}$ কোনো একটা function, আর $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n \subseteq D$ হল এমন এক জোড়া sequence যাতে $x_n - y_n \to 0$ হয়। যদি $f(x)$ function-টা uniformly continuous over D হয়, তবে $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ হতে বাধ্য। এর converse-টাও ঠিক, মানে $f(x)$ যদি uniformly continuous না হয়, তবে এমন $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n \subseteq D$ পাব যাতে $x_n - y_n \to 0$ হয়, কিন্তু $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$.

Example 33: Prove that the function $f(x) = \frac{1}{x}$, $0 < x < 1$ is uniformly continuous in $(a, 1)$ but not uniformly continuous in $(0, 1)$.[3] **(2011.7a)**

SOLUTION: বলাই বাহুল্য যে এখানে $a > 0$ হওয়া দরকার, যেটা বলতে ভুলে গেছে।

প্রথম অংশে আমরা আগের theorem-টা লাগাব, খালি তার জন্য প্রথমে $(a, 1)$-র জায়গায় $[a, 1]$ আনব, তারপর আবার $(a, 1)$-এ ফিরে যাব। এই কায়দাটা শিখে রাখা ভালো।

> First part:
>
> We shall assume $a > 0$.
>
> The function $\frac{1}{x}$ is continuous on the closed, bounded set $[a, 1]$.
>
> So it is uniformly continuous on $[a, 1]$.
>
> Hence $f(x) = \frac{1}{x}$ is uniformly continuous on $(a, 1)$, since $(a, 1) \subseteq [a, 1]$.

দ্বিতীয় অংশে sequential criterion লাগাব। প্রথমে লিখে নিই সেটা কি--

> Second part: We know that if $f : A \to \mathbb{R}$ is uniformly continuous then for all $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n \subseteq A$ with $|a_n - b_n| \to 0$, we must have $|f(a_n) - f(b_n)| \to 0$.

প্রশ্ন হল কিভাবে এরকম দুটো sequence পাব। এখানে আবার আমাদের আংটির উপমাটা সাহায্য করবে। Fig 46 থেকে বুঝতে পারছ কেন এটা uniformly continuous হবে না, যেহেতু গ্রাফটা বাঁদিকে 0-র কাছে ক্রমশঃই খাড়া হয়ে উঠছে। তাই আমরা এমন দুটো sequence নেব যারা 0-তে যায়। তাহলে তাদের পার্থক্যটাও 0-তে যাবে। কিন্তু এমনভাবে নেব যাতে ওদের function value-র পার্থক্যটা 0-তে না যায়। Fig 47 দ্যাখো। এটা অনেকভাবে করা যায়, একটা উদাহরণ এইরকম--

> We define $a_n = \frac{1}{n+1}$, $\quad b_n = \frac{1}{n+2}$. Then $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n \subseteq (0, 1)$ and $|a_n - b_n| \to 0$.
>
> But
>
> $$\begin{aligned} |f(a_n) - f(b_n)| &= |f(\tfrac{1}{n+1}) - f(\tfrac{1}{n+2})| \\ &= |(n+1) - (n+2)| = 1 \not\to 0. \end{aligned}$$
>
> Hence f is not uniformly continuous on $(0, 1)$.

■

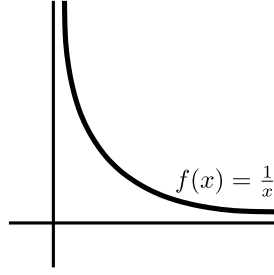
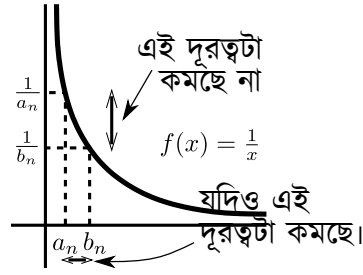



Fig 46 **Fig 47**

Example 34: Show that the function $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ given by $f(x) = \frac{1}{x}$ is not uniformly continuous on $[a, 1]$ where $a > 0$[2+1] **(2003)**
SOLUTION: ভুল অংক। ওই "not" শব্দটা না থাকলে আগের অংকের প্রথম অংশের মত হত। ■

Exercise 33: Give an example with proper justification of a function continuous over the open interval $(0, 1)$ but not uniformly continuous thereon[2] **(2001)**
HINT:
?? নম্বর অংকের দ্বিতীয় অংশেই এর উত্তর দিয়েছি। ■

Example 35: Show that the function

$$f(x) = \cos\frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq 1$$

is not uniformly continuous on $(0, 1]$.[3] **(2006)**
SOLUTION: এখানেও আগে ছবি দেখে বুঝব কেন uniformly continuous নয়, এবং তারপর sequential criterion লাগাব। Fig 48 দেখলেই বুঝবে যে গ্রাফটা বাঁদিকে 0-র কাছে ক্রমশঃই খাড়া হয়ে উঠছে। সুতরাং এমন দুটো sequence নিতে হবে যারা 0-তে যায়।

We know that if $f : A \to \mathbb{R}$ is uniformly continuous then for all $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n \subseteq A$ with $|a_n - b_n| \to 0$, we must have $|f(a_n) - f(b_n)| \to 0$.
We define

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{and} \quad b_n = \frac{1}{(2n-1)\pi}.$$

Then

$$\{a_n\}_n, \{b_n\}_n \subseteq (0, 1] \quad \text{and} \quad |a_n - b_n| \to 0.$$

But for each $n \in \mathbb{N}$, we have

$$\begin{aligned} f(a_n) &= \cos(2n\pi) = 1, \\ f(b_n) &= \cos((2n-1)\pi) = -1. \end{aligned}$$

So

$$|f(a_n) - f(b_n)| \to 2 \neq 0.$$

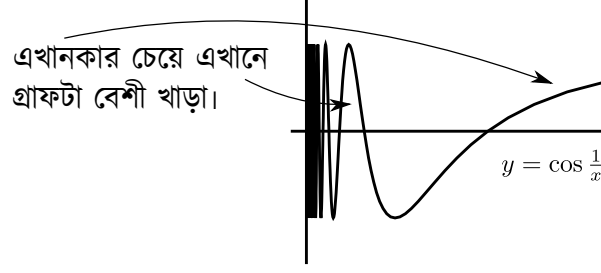
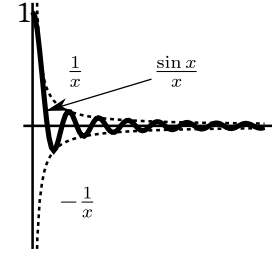



Fig 48 **Fig 49**

$\therefore f$ cannot be uniformly continuous on $(0, 1]$.

■

একটা function দেওয়া থাকলে কি করে বুঝব সেটা uniformly continuous কিনা? এই প্রশ্নে এসে অনেকেই খাবি খায়। নীচের অংকটা করলে অনেকটা ধারণা হবে।

Example 36: Prove or disprove: $\frac{\sin x}{x}$, $x > 0$ is not uniformly continuous.[3] **(2013.6c)**

SOLUTION:

সব সময়েই জানবে যে function-টার গ্রাফের আদলটা জানা থাকলে সুবিধা হয়। এখানে গ্রাফটা দেখিয়েছি Fig 49-এ। এই গ্রাফটা যে এরকম দেখতে হবে সেটা কিন্তু হাতে এঁকেই বোঝা যায়, এইভাবে-- আমরা জানি যে $\sin x$-এর গ্রাফ হয় ঢেউ খেলানো, ঢেউগুলো -1 থেকে 1 পর্যন্ত ওঠানামা করে। সুতরাং $\frac{\sin x}{x}$ যে ওঠানামা করবে $\frac{1}{x}$ থেকে $-\frac{1}{x}$ পর্যন্ত এতে আর আশ্চর্যের কি আছে? সুতরাং প্রথমে $\frac{1}{x}$ আর $-\frac{1}{x}$-এর গ্রাফ দুটো হাল্কা করে এঁকে নাও, তারপর তাদের মধ্যে একটা ঢেউ খেলানো লাইন এঁকে দিলেই $\frac{\sin x}{x}$-এর গ্রাফের আদলটা পেয়ে যাবে। খালি সমস্যা হল x যখন 0-র খুব কাছে, তখন $\frac{1}{x}$ আবার ∞-র কাছে চলে যায়। কিন্তু আমরা হায়ার সেকণ্ডারী থেকেই জানি যে $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$. সুতরাং আমাদের ঢেউটা 1-এর গা ঘেঁসে শুরু হবে।

এবার চট্ করে গ্রাফটার গায় চোখ বুলিয়ে দ্যাখো কোথাও ভাঙাচোরা কিছু আছে কিনা। যদি থাকে তো discontinuous, সুতরাং uniform continuity-র আশা সেখানেই শেষ। এখানে অবশ্য সে সমস্যা নেই। এবার দ্যাখো গ্রাফটা কোথাও ভীষণ ভীষণ খাড়া হয়ে উঠছে (বা নামছে) কিনা। ভীষণ ভীষণ খাড়া হয়ে ওঠা কাকে বলে তার নমুনা আগের অংকেই দেখেছ। এখানে সেরকম কোনো সমস্যা নেই। ব্যস্ তুমি নিশ্চিন্ত হয়ে বলতে পারো যে এটা uniformly continuous হবেই।

Shall show that $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ is uniformly continuous on $(0, \infty)$,

প্রশ্ন হল প্রমাণ করব কি করে? আমরা জানি যে একটা continuous function সবসময়েই closed, bounded set-এর উপরে uniformly continuous হয়। কিন্তু এখানে domain-টা হল $(0, \infty)$, যেটা closed-ও নয়, bounded-ও নয়! সুতরাং সরাসরি সংজ্ঞা থেকে প্রমাণ করার চেষ্টা করি--

ie,

◎ $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in (1, \infty) \quad \big(|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon\big).$

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার একটা $\exists$ আছে, সুতরাং ঠাণ্ডা মাথায় চিন্তা করতে হবে। প্রথমে লক্ষ কর যে আমাদের domain-টা $(0, \infty)$ হলেও ওটাকে তুমি স্বচ্ছন্দে $[0, \infty)$ বল ভাবতে পারো, খালি $f(0)$-টা 1 ধরে নাও। সুতরাং domain-টাকে অন্ততঃ closed বানানো গেছে, যদিও bounded করা যায় নি।

মনে রেখো আমাদের কাজ হল $|f(x) - f(y)|$-কে $< \epsilon$ রাখা। গ্রাফ থেকে লক্ষ করো যে যতই ডানদিকে যাচ্ছি ঢেউগুলোর ওঠানামা কিরকম ক্রমশঃ স্তিমিত হয়ে আসছে, কারণ $\frac{1}{x}$ ক্রমশঃই কমে আসছে। সুতরাং x, y-কে যথেষ্ট বড় নিলে ধরো $x, y \geq A$ (যেখানে A কিছু একটা যথেষ্ট বড় সংখ্যা) $|f(x) - f(y)|$ এমনিই খুব ছোটো থাকবে। আর যদি $x, y \in [0, A]$ থাকে তবে তো সমস্যাই নেই, কারণ $[0, A]$ হল closed, bounded. কিন্তু যদি $x \leq A$ আর $y \geq A$ হয়? তাহলে এইভাবে এগোনো যাবে--

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)|.$$

এইবার $|f(x) - f(A)|$-কে $< \frac{\epsilon}{2}$ রাখতে পারব কারণ $x, A \in [0, A]$. আবার $|f(A) - f(y)|$-কেও $< \frac{\epsilon}{2}$ রাখা যাবে কারণ $A, y \in [A, \infty)$.

যদি মাথা গুলিয়ে যায় ভয় নেই, নীচের ধাপগুলো দেখলেই বুঝতে পারবে। খালি এইটুকু মনে রাখো যে আমরা $[0, \infty)$-কে দুইভাগে ভেঙে নিচ্ছি $[0, A]$ আর $[A, \infty)$. আমরা A-টা এমনভাবে নেব যাতে $x, y \in [A, \infty)$ হলে $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ হয়।

এখন

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| = |[|\frac{\sin x}{x}|]| + |[|\frac{\sin y}{y}|]| \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{A}.$$

সুতরাং $frac2A = \frac{\epsilon}{2}$ নিলেই চলবে। এবার তবে লেখা শুরু করি--

> Let $A = 4/\epsilon$.

Domain-টাকে $(0, \infty)$-র বদলে $[0, \infty)$ বানাব--

> Define $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ as
>
> $$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ f(x) & \text{if } x \in (0, \infty) \end{cases}.$$

এইবার প্রথম টুকরোটা নিয়ে কাজ করব--$[0, A]$.

> $\because \lim_{x \to 0+} f(x) = 1$,
>
> $\therefore g$ is continuous.
>
> $\therefore g$ is uniformly continuous on the closed, bounded set $[0, A]$.
>
> $\therefore g$ is uniformly continuous on the subset $(0, A]$.
>
> $\therefore f$ is uniformly continuous on $(0, A]$.
>
> So
>
> $$\exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in (0, A] \quad \left(|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \tfrac{\epsilon}{2}\right). \qquad (*)$$
>
> $\exists\delta$ Choose this $\delta > 0$.

দ্বিতীয় টুকরোটা, মানে $[A, \infty)$ নিয়ে চিন্তা নেই, ওখানে ঢেউগুলো এত মিইয়ে এসেছে যে $|f(x) - f(y)|$ এমনিতেই ছোটো।

> $\forall x, y$ Take any $x, y \in (0, \infty)$ such that $|x - y| < \delta$.

এবার একে একে তিনটে কেস পরীক্ষা করি--

Case 1: If $x, y \in (0, A]$,
then $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ by (*). So $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$, as required.
Case 2: If $x, y \in [A, \infty)$, then

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |[|\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin y}{y}|]| \\ &\leq |[|\frac{\sin x}{x}|]| + |[|\frac{\sin y}{y}|]| \quad [\text{ by } \Delta\text{-ineq}] \\ &\leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ &\leq \frac{1}{A} + \frac{1}{A} = \frac{2}{A} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

So $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$, as required.
Case 3: If one of x, y is in $(0, A]$ and the other in $[A, \infty)$, then $|x - A|, |A - y| < \delta$.

এটা কেন হল বুঝলে তো? A তো x, y-এর মাঝখানে কোথাও, তাই A-র থেকে x, y-এর দূরত্ব x, y-এর নিজেদের মধ্যেকার দূরত্বের চেয়ে বড় হতে পারে না।

So

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| \quad [\text{ by } \Delta\text{-ineq}] \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} \quad [\text{ by cases 1 \& 2}] \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

Example 37: Let f be a real-valued function defined on an interval I. If f is uniformly continuous on I, show that f is continuous on I. Is the converse true? Justify your answer. Under what condition on the interval I will the converse be true? [2+2+1] **(2002)**

SOLUTION: প্রথম অংশটা তো আগেই করেছি ?? নম্বর অংকে। এবার পরের অংশ দুটো।
আগের অংক কয়টা করার পর দ্বিতীয় অংশটা খুবই সহজ।

Second part:

No, the converse is not true: it is possible to have continuous $f : I \to \mathbb{R}$ for an interval I such that f is not uniformly continuous on I.

A counterexample is: $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ defined as $f(x) = 1/x$. It is continuous everywhere in $(0, 1)$.

But it is not uniformly continuous on $(0, 1)$.

⟦ Because:

If we take $a_n = \frac{1}{2n}$ and $b_n = \frac{1}{3n}$ then $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n \subseteq (0,1)$ with

$$|a_n - b_n| \to 0.$$

But

$$|f(a_n) - f(b_n)| = |2n - 3n| = n \not\to 0.$$

⟧

তৃতীয় অংশটায় theorem-টা লাগাব।

Third part:

A sufficient condition on I is that it is closed and bounded.

■

Example 38: Show that a real valued function f defined on an open interval (a,b) is uniformly continuous if and only if $\lim_{x\to a+} f(x)$ and $\lim_{x\to b-} f(x)$ both exist finitely.[5] **(2005)**

SOLUTION: অবশ্যই একটা ভুল অংক। খালি দুইপ্রান্তের limit দুটো finite হলেই খামোখা function-টা মাঝখানেও uniform continuous হতে যাবে কোন দুঃখে? Fig 50 দেখলেই একটা counterexample পাবে। আসলে এই অংকটায় বলতে চেয়েছিল যে f-টা continuous-ও বটে। সেক্ষেত্রে যদি দুই প্রান্তের limit দুটো finite হলেই সেটা uniformly continuous-ও হবে, এবং বিপরীতপক্ষে uniformly continuous হলে দুই প্রান্তের limit দুটো finite হতেও বাধ্য।

এটা একটা "if and only if" অংক, তাই দুটো অংশে ভেঙে করব, "if" আর "only if". প্রথম অংশে আবার সেই কায়দাটা লাগাব--(a,b)-র জায়গায় $[a,b]$ এনে ফেলব, তারপর theorem-টা লাগাব, এবং শেষে ফের (a,b)-তে ফিরে আসব।

If part:

Let

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a+} f(x) &= A \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x\to b-} f(x) &= B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Fig 50

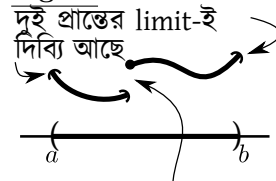
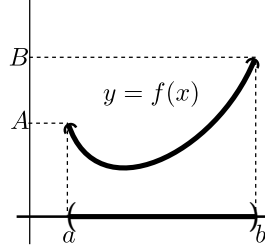
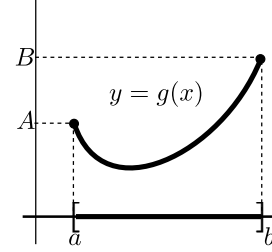



Fig 51

Fig 52

Then we define $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ as

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in (a, b) \\ A & \text{if } x = a \\ B & \text{if } x = b \end{cases}$$

কি করলাম সেটা ছবি দেখে বুঝে নিই। শুরু করেছিলাম $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ নিয়ে (Fig 51)। তার দুপ্রান্তে দুটো point লাগিয়ে পেলাম $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, (Fig 52).
এবার $g(x)$-এর উপরে theorem-টা লাগানো যায়।

Then, by construction, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ is continuous.
$\because [a, b]$ is a closed and bounded,
$\therefore g(x)$ is uniformly continuous on $[a, b]$.

অবশেষে $[a, b]$ থেকে (a, b)-তে ফেরার পালা।

$\therefore g(x)$ is uniformly continuous on $(a, b) \subseteq [a, b]$.
$\therefore f(x)$ is uniformly continuous on (a, b), because $g \equiv f$ on (a, b).

"Only if" অংশে contradiction লাগাব--

Only if part:
Given: f is uniformly continuous on (a, b).
Let, if possible, $\lim_{x \to a+} f(x)$ not exist finitely.

এবার limit-এর sequential criterion লাগাব--

$\therefore \exists \{a_n\}_n \subseteq (a, b)$ such that $a_n \to a+$ but $\{f(a_n)\}_n$ does not converge finitely,
i.e., $\{f(a_n)\}_n$ is not a Cauchy sequence,

চট্ করে ভেবে নিই Cauchy sequence না হওয়া মানে কি। Cauchy sequence হওয়া মানে ছিল

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |f(a_m) - f(a_n)| < \epsilon.$$

এর negation নিলে পাব--

i.e,

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists m, n \geq N \quad |f(a_m) - f(a_n)| \geq \epsilon.$$

Keep this ϵ fixed.
Putting $k \in \mathbb{N}$ for N we see

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists m_k, n_k \geq k \quad |f(a_{m_k}) - f(a_{n_k})| \geq \epsilon. \quad (*)$$

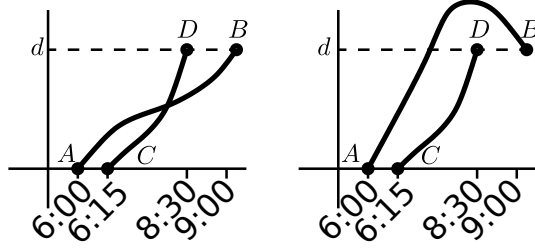
Define $b_k = a_{m_k}$ and $c_k = a_{n_k}$.
Then $b_k \to a$ and $c_k \to a$.
$\therefore |b_k - c_k| \to 0.$
But $|f(a_{m_k}) - f(a_{n_k})| \not\to 0,$ due to (*), contradicting sequential criterion of uniform continuity.

■

নীচের অংকটা উপরের অংকটার only if part-এর একটা অর্ধেক। সুতরাং নতুন করে সমাধান করার কিছু নেই।

Exercise 34: If a real-valued function ϕ is uniformly continuous in (c, d), prove that $\lim_{x\to d-} \phi(x)$ exists finitely.[3] **(2012.7b)** ■

Answers

1. $h(x) = f(x) - g(x)$-এর উপর sign-preserving property লাগাও। **2.** $f(x) = x^{10} - 4x + 37$ নিলে $f(5) > 0$. সুতরাং 5-এর একটা neighbourhood জুড়ে $f(x) > 0$ হবে। **3.** $\epsilon = -\ell > 0$ নিলে $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N'(a, \delta) \quad f(x) \in N(\ell, \epsilon) = (2\ell, 0)$. **6.** **(1)** $f(x) = e^x,\ B = (0, \infty)$. এখানে $f^{-1}(B) = \mathbb{R}$. **(2)** $f(x) \equiv 2,\ B = \{2\}$. এখানেও $f^{-1}(B) = \mathbb{R}$. **7.** $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c)$ হল open, কারণ A^c হচ্ছে open. তাই $f^{-1}(A)$ হল closed. **8.** হ্যাঁ পারে, $f(x) \equiv 2$ আর $A = [1, 3)$. তাহলে $f^{-1}(A) = \mathbb{R}$. **9.** যেকোনো $x \in f^{-1}(A)$ নাও। $f(x) \in A$. যেহেতু A হল open, তাই $\exists \epsilon > 0 \quad N(f(x), \epsilon) \subseteq A$. যেহেতু f হল continuous, তাই $\exists \delta > 0 \quad \forall w \in N(x, \delta) \cap D \quad f(w) \in N(f(x), \epsilon)$. এই δ-টা x-এর উপর নির্ভর করতে পারে, তাই ওকে δ_x বলা যাক। তাহলে $N(x, \delta_x) \cap D \subseteq f^{-1}(A)$. এবার B নাও এরকম যাবতীয় $N(x, \delta_x)$-এর union, যেখানে $x \in f^{-1}(A)$. **10.** আগের অংকটা ব্যবহার কর। মনে রেখো $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$. **11.** আগের অংক দুটো কাজে লাগাও। **12.** **(1)** $f(x) = e^x,\ A = \mathbb{R}$. এখানে $f(A) = (0, \infty)$. **(2)** $f(x) \equiv 2,\ A = \mathbb{R}$. এখানে $f(A) = \{2\}$. **14.** $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ নাও $h(x) = f(x) - g(x)$. তবে h হবে continuous, এবং $h(a) < 0$ আর $h(b) > 0$. এবার h-এর উপরে intermediate value theorem লাগাও। **15.** এখানে গণ্ডী হল $y = x^2$. তোমাকে $f(x) - x^2$-এর উপর intermediate value theorem লাগাতে হবে। **16.** ঠিক, ভুল। **17.** এখানে গণ্ডী হল $x^2 + y^2 = 1$ এই circle-টা। $f(x)$-এর গ্রাফ এই circle-টাকে পেরোতে বাধ্য। তার মানে $x^2 + (f(x))^2 - 1$-এর উপরে intermediate value theorem লাগালেই হবে। **18.** If f is a continuous function with $f(0) = 0$ and $|f(\pm 1)| = 1$, then show that there exists at least two distinct value of $c \in (-1, 1)$ such that $|f(c)| = 1 - |c|$. **19.** ঠিক, কারণ এর মধ্যে মিনিটের কাঁটাটা ঘন্টার কাঁটাকে ওভারটেক করেছে। **20.** যদি রামপুর আর শ্যামপুরের মধ্যে দূরত্ব d হয় তবে সময়ের সাথে সাথে রামপুর থেকে বাসের দূরত্বের গ্রাফটা নীচের বাঁদিকের ছবিটার মত A থেকে B অব্ধি যাবে। আর শ্যামপুর থেকে ট্রেনের দূরত্বের গ্রাফটা যাবে C থেকে D পর্যন্ত। সুতরাং পরস্পরকে ছেদ করবেই। যদি বাসরাস্তাটা সোজা না হত তবে রামপুর থেকে বাসের দূরত্বটা কোনো সময়ে $> d$ হতে পারত, সেক্ষেত্রে গ্রাফটা ডানদিকের ছবিটার মত হতে পারত।

21. যদি তা না হত, তবে এমন x, y পেতাম যাতে $f(x) \neq f(y)$. যেহেতু $\mathbb{Q}$ হল dense in $\mathbb{R}$, তাই $f(x)$ আর $f(y)$-এর মাঝে কোথাও একটা rational পাবে, r. যেহেতু f হল continuous, তাই intermediate value theorem বলছে যে f-কে কোথাও একটা এই r value-টা নিতে হবে, যেটা শর্ত অনুযায়ী অসম্ভব। **22.** f-কে constant function হতে হবে, কারণ নইলে দুটো integer-এর মাঝখানের non-integer value-গুলোও ওকে নিতে হবে। যেহেতু $f(5) = 3$, তার মানে $f(x) \equiv 3$. তাই $f(0) = 3$. **24.** দুবার intermediate value theorem লাগাও, একবার $[0, 1]$-এর উপরে f-টা 0 থেকে 3 অব্ধি উঠেছে। সুতরাং মাঝখানে একবার অন্ততঃ 2 হয়েছে। আবার $[1, 2]$-এর উপরে f-টা 3 থেকে -1 অব্ধি নেমেছে। সুতরাং এর মধ্যে আবার কোথাও 2 হয়েছে। **25.** $\{10\} = [10, 10]$. **26.** $A = (-\infty, \infty)$. **27.** $A = (0, 1)$. **31.** যেহেতু $B \subseteq A$, তাই "$\forall x, y \in A$ কিছু একটা" হলে "$\forall x, y \in B$ সেই একই জিনিস" হতে বাধ্য।

Chapter X
Countability

রাজকন্যা কি কম পড়িতেছে?

--গুপী গাইন বাঘা বাইন

DAY 1
ছোটো infinity, বড় infinity

আমরা জানি কাকে finite set আর কাকে infinite set বলে। ধরো তোমাকে দুটো set দিলাম--

$$\{1, 5, -8, 4\} \text{ আর } \{a, b, c, d\}.$$

এরা দুজনেই finite set. যদি জিজ্ঞাসা করি যে এদের মধ্যে কার সাইজ বড় তবে তুমি বলবে যে, দুজনেরই সাইজ সমান। প্রশ্ন হল এই রকম কথা কি আমরা দুটো infinite set-এর ক্ষেত্রেও বলতে পারি? অর্থাৎ infinite set-এর সাইজ সম্বন্ধে কি কিছু বলা যায়? সব infinite set-এরই তো সাইজ infinity, কিন্তু তাদের মধ্যে কি কোনো তারতম্য আছে, যেমন এটা "ছোটো infinity" ওটা "বড় infinity", এই রকম? শুনলে অবাক লাগলেও এরকমটা কিন্তু করা সম্ভব। কায়দাটা ভীষণ কঠিন কিছু নয়, কিন্তু বেশ অদ্ভুত। বোঝার জন্য প্রথমে finite set দিয়ে কয়েকটা উদাহরণ দেখি।
আচ্ছা, এক্ষুণি যে দুটো finite set দেখালাম, তাদের সাইজ যে সমান সেটা তুমি কি করে বুঝলে? তুমি নিশ্চয়ই দুটো set-কেই গুণলে, গুণে দেখলে যে দুটোরই সাইজ 4, তাই বলতে পারলে যে ওরা সমান সাইজের set. কিন্তু এই গোণাটার কি সত্যই দরকার ছিল? না, দুটো finite set-এর মধ্যে কার সাইজ বড় সেটা set দুটোকে আলাদা করে না গুণেও বলা যায়, এবং অতি প্রাচীনকালে (যখন সংখ্যা-টংখ্যা কিছুই আবিষ্কার হয় নি) তখনও মানুষ দুটো finite set-এর সাইজের তুলনা করতে পারতো, এইভাবে-- ধর এক প্রাচীন গুহা মানবের কিছু গরু আছে আর কয়েকটা ছেলে আছে (Fig 1)। খুব প্রাচীনকালের কথা, তখনও সংখ্যার আবিষ্কার হয়নি, তাই সেই গুহামানব গুণতে জানে না যে তার ঠিক কটা ছেলে আর কটা গরু আছে! সে ঠিক করেছে যে প্রত্যেকটা ছেলেকে একটা করে গরু উপহার দেবে, তাই তার জানা দরকার যে গরুর set-টা বড় না ছেলের set-টা বড়। তার জন্য সে প্রতিটি ছেলের পাশে একটা করে গরু দাঁড় করিয়ে দিল (Fig 2)। দেখা যাচ্ছে যে অন্ততঃ একটা গরু বাকী রইল, তখন লোকটার আর সন্দেহ রইল না যে, ছেলেই কম পড়েছে!
এইভাবে জোড় মিলিয়ে দুটো set-এর সাইজের তুলনা করা কিন্তু আমরা আজও করি।

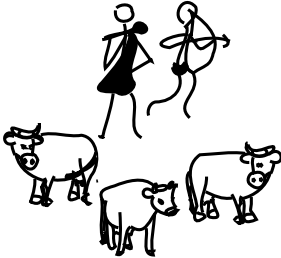
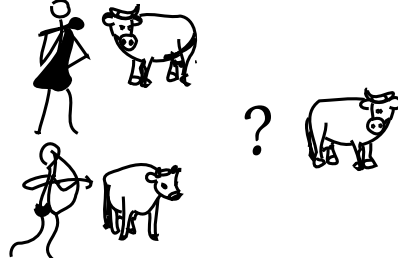
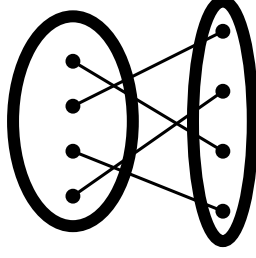
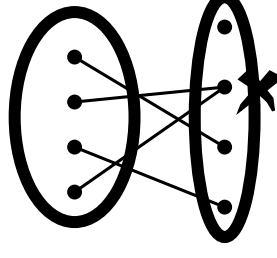
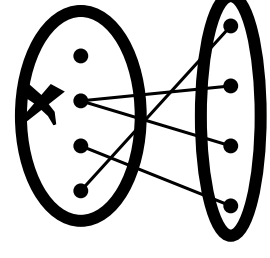



Fig 3 **Fig 4** **Fig 5**

Example 1: কলকাতা শহরে মোট লোক সংখ্যা ধর x. আর মোট মানুষের মাথার সংখ্যা ধর y. তুমি নিশ্চয়ই জানো না x ঠিক কত! কিন্তু তা বলে এতে নিশ্চয়ই সন্দেহ নেই যে $x = y$, কারণ প্রত্যেকটা মানুষের ঠিক একটা করেই মাথা থাকে! ■

Exercise 1: একটা ঘরে কয়েকজন ভদ্রলোক ভদ্রমহিলা আছেন। এঁরা সবাই বিবাহিত। ভদ্রলোকদের সকলেরই স্ত্রী ঘরের মধ্যেই আছেন, এবং ভদ্রমহিলাদের স্বামীরাও সবাই উপস্থিত। তাহলে বলতে পারবে ঘরে ভদ্রলোকের সংখ্যা বেশী, না ভদ্রমহিলার? ■

এই জোড় মেলানোর ব্যাপারটা ছবি এঁকে দেখলে সুবিধা হবে। দুটো finite set-এর সাইজের তুলনা করার জন্য আমরা দুটো set-এর একটা করে element নিয়ে তাদেরকে একটা লাইন দিয়ে যোগ করব, এইটা হল জোড়-বাঁধা (Fig 3)। লাইনগুলো এমনভাবে টানতে হবে যাতে, কোনো element-এই একাধিক লাইন না মেশে, অর্থাৎ Fig 4 বা Fig 5-এর মত হলে চলবে না। এইভাবে লাইন টানতে টানতে যখন আর লাইন টানা যাবে না, তখন দেখব যে কোনো set-এ জোড় না বাঁধা কেউ পড়ে রইল কি না। যদি না থাকে তবে set দুটোর সাইজ সমান বলব।
লক্ষ কর যে A, B যদি সমান সাইজের set হয় তবে তাদের মধ্যে এরকম লাইন টানা মানে হল একটা function $f : A \to B$ নেওয়া যেটা one-to-one এবং onto. এখানে f-টা--

- একটা function, কারণ A-র প্রত্যেকটা element থেকে ঠিক একটা করেই লাইন বেরিয়েছে,
- one-to-one, কারণ কোনো দুটো লাইন B-এর একই element-এ শেষ হয়নি।
- onto, কারণ B-এর কোনো element-ই ফাঁকা পড়ে নেই।

একটা function যদি একই সঙ্গে one-to-one এবং onto হয়, তবে তাকে এককথায় বলে একটা bijection. তার মানে দুটো finite set-এর মধ্যে যদি একটা bijection থাকে তবে তাদের সাইজ সমান হতে বাধ্য, এবং বিপরীতপক্ষে, যদি তাদের সাইজ সমান হয় তবে তাদের মধ্যে একটা bijection থাকতে বাধ্য। এবং এই পুরো ব্যাপারটার জন্য set-দুটোকে আলাদা করে গোণার কোনো দরকার পড়ল না।
যেহেতু গুণতে হচ্ছে না, তাই এই একই পথে আমরা দুটো infinite set-এর সাইজেরও তুলনা করতে পারি। আমরা যাকে "সাইজ" বলছি তাকে অংকের ভাষায় বলে **"cardinality"**, যেমন $\{1, 2, 4\}$ এই set-টার cardinality হল 3.
যদি দুটো set-এর সাইজ (মানে cardinality) সমান হয়, তবে তাদের অনেক সময়ে বলে **equipotent.** অবশ্য এই শব্দটা খুব বেশী প্রচলিত নয়।

DEFINITION: **Equipotent**

Let A, B be any two sets(finite বা infinite যা খুশী হতে পারে)। We say that they are equipotent if there is a bijection between A and B.

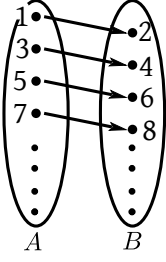
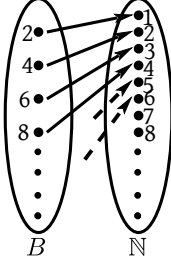
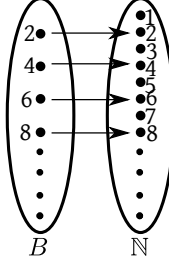



Fig 6 **Fig 7** **Fig 8**

Example 2: আমরা জানি যে $\mathbb{N}$ হল যাবতীয় positive integer-দের set. এর মধ্যে even আর odd দুই ধরণের সংখ্যাই আছে। ধর যাবতীয় odd, positive সংখ্যার set-এর নাম দিলাম A, আর সব even, positive সংখ্যার set-এর নাম রাখলাম B, মানে

$$A = \{1, 3, 5, \ldots\} \text{ আর } B = \{2, 4, 6, \ldots\}.$$

তাহলে A আর B-এর cardinality কি সমান হবে?

SOLUTION: হ্যাঁ, কারণ ওদের মধ্যে আমরা Fig 6-এর মত লাইন টেনে জোড় বাঁধতে পারব। তবে infinite set-এর ক্ষেত্রে তো আর সব লাইন এঁকে দেখানো যায় না, তাই গুছিয়ে লেখার জন্য bijection-টাকে একটা ফর্মুলা দিয়ে লিখতে হয়। এখানে দেখাই যাচ্ছে যে প্রতিটা বিজোড় সংখ্যা থেকে তার পরের জোড় সংখ্যাটা পর্যন্ত লাইন টেনেছি, তার মানে bijection-টা হল $f : A \to B$, যেখানে $f(n) = n + 1$. ■

কিন্তু ব্যাপারটা সবসময়ে এতটা সহজ থাকে না। আমরা প্রতিদিনকার জীবনে খালি finite set নিয়ে নাড়াচাড়া করেই অভ্যস্ত। মাঝে মাঝে infinite set-দের বেলায় এমন কিছু কাণ্ড ঘটে যেগুলো আমাদের finite set-এ অভ্যস্ত বুদ্ধিতে গোলমেলে ঠেকে। এইরকম একটা উদাহরণ দেখা যাক--

Example 3: আবার আগের উদাহরণের মত $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ আর $B = \{2, 4, 6, ...\}$ নিয়ে কাজ করব। প্রশ্ন হল--$\mathbb{N}$ আর B-এর cardinality কি সমান?

SOLUTION:

শুনেই হয়তো ভাবছ, তা কি করে হয়? B তো $\mathbb{N}$-এর ভিতরে একটা subset. সুতরাং B-র cardinality নিশ্চয়ই $\mathbb{N}$-এর cardinality-র চেয়ে অনেক ছোটো, বোধহয় তার অর্ধেক (কারণ জোড়-বিজোড় মিলিয়ে পুরো $\mathbb{N}$ তৈরী, এবং জোড় আর বিজোড়ের cardinality সমান)।

কিন্তু Fig 7-এর দিকে একবার তাকালেই বুঝবে যে আসলে $\mathbb{N}$ আর B-র cardinality সমান! এখানে আমরা $f : B \to \mathbb{N}$ নিয়েছি

$$f(n) = \frac{n}{2},$$

যেটা অবশ্যই একটা bijection. ■

খুবই অদ্ভুত সন্দেহ নেই, কিন্তু অনস্বীকার্য! তুমি অবশ্য আপত্তি তুলতে পারো এই বলে যে ছবিটা তো Fig 8-এর মত করেও আঁকা যেত। তাহলে তো সেটা bijection হত না (কারণ onto নয়)! ঠিক কথা, কিন্তু সেক্ষেত্রে আমার উত্তর হবে-- definition-এ কোথাও বলেনি যে bijection ছাড়া অন্য কোনো function থাকা চলবে না, খালি বলেছে যে যদি অন্ততঃ একটাও bijection থাকে তবে ওদের cardinality সমান বলা যাবে।

এই কথাটা হজম হওয়া কিছু শক্ত, কারণ finite set -এর বেলায় এ সমস্যাটা আসে না। যদি A, B দুটো সমান cardinality-র finite set হয়, তবে তুমি যেমন খুশী জোড় বাঁধতে পারো, সব সময়েই হিসেব মিলে যাবে (Fig 9)। কিন্তু infinite set-দের বেলায় সাবধানে এগোতে হবে, যেমন তেমন করে জোড় মেলালে হিসেব নাও মিলতে পারে। ঠিক কি করে এগোলে একটা bijection পাওয়া যায়, তার কিছু হদিশ এই অধ্যায়ে পাবে।

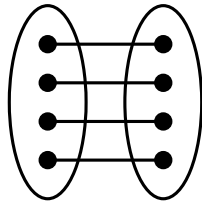
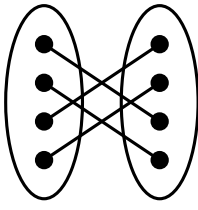
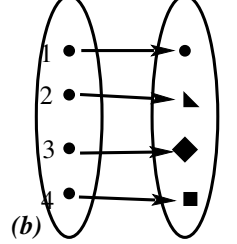



Fig 9 Fig 10 Fig 11

এই প্রসঙ্গে বলে রাখি যে কোনো set-এর cardinality যদি $\mathbb{N}$-এর cardinality-র সমান হয়, তবে set-টাকে বলে **enumerable** বা **denumerable** বা **countably infinite.** আর finite এবং denumerable set-দের একত্রে বলে **countable**.

Example 4: When is a subset S of real numbers called denumerable?[1] **(2001,2007)**

SOLUTION:

> $S \subseteq \mathbb{R}$ is called <u>denumerable</u> if there is a bijection $f : \mathbb{N} \to S$.

এখানে একটা কথা বলে রাখা ভালো, যে একটা bijection-এর inverse-ও একটা bijection হয়। সুতরাং $\mathbb{N}$ থেকে S-এ একটা bijection আছে না বলে আমরা এটাও বলতে পারতাম যে S থেকে $\mathbb{N}$-এ একটা bijection আছে। তাতে definition-এর মূল অর্থ কিছুমাত্র বদলাত না। ■

এই যে আমরা দুটো set-এর cardinality-র তুলনা করছি ওদের element-দের মধ্যে জোড়-বেঁধে, এই ব্যাপারটাকে আমরা এবার একটু অন্যভাবে দেখব। **Example 5:** Fig 10-এ একটা set দেখিয়েছি, এতে কতগুলো element আছে?

SOLUTION: তুমি তৎক্ষনাৎ গুণতে শুরু করবে। কি করে গুণবে? প্রথমে একটা element-এ আঙুল রেখে গুণবে 1, তারপর আরেকটা element-এ আঙুল রেখে গুণবে 2, এইভাবে। কোনটা আগে গুণছ, কোনটা পরে গুণছ, সেটা গুরুত্বপূর্ণ নয়। যেভাবেই গোণো উত্তর হবে 4. যেমন তুমি Fig 11(a)-এর মতও গুণতে পারো, আবার Fig 12(a)-এর মতও গুণতে পারো। লক্ষ কর যে এই গোণাটা কিন্তু আসলে একরকমের জোড়-বাঁধা ছাড়া আর কিছুই নয়। Fig 11(b) আর Fig 12(b) দেখলেই সেটা বুঝবে। অর্থাৎ গুণে যে তুমি উত্তর পেলে 4, তার মানে set-টার সঙ্গে $\{1, 2, 3, 4\}$-এর একটা bijection আছে, এই bijection-টাই বলে দিচ্ছে কার পরে কাকে গুণছ। কিন্তু গোণা মানে bijection কেন? তুমি নিশ্চয়ই একই element দুবার গুণবে না, তাই one-to-one (Fig 13). আর তুমি নিশ্চয়ই কোনো element বাদ দিয়ে যাবে না, তাই onto Fig 14). ■

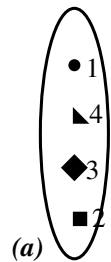
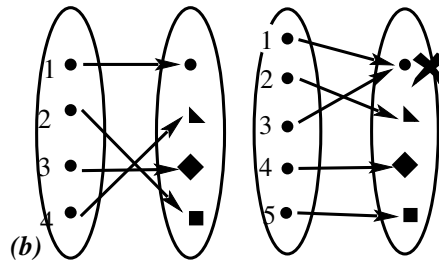



Fig 12 Fig 13 Fig 14

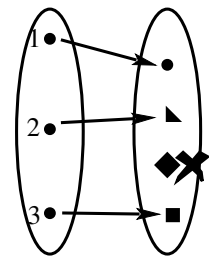
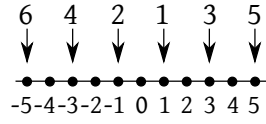



Fig 15

যে set-গুলো enumerable হয় তাদের ক্ষেত্রেও একই কথা খাটে, তুমি এদের element-গুলোকেও $1, 2, 3, 4, \ldots$ করে গুণে যেতে পারো, কিন্তু যেহেতু $\mathbb{N}$ হল infinite তাই এই গোণাটা কোনো দিন শেষ হবে না। সেই কারণেই enumerable set-দের আরেক নাম countably infinite.

Example 6: Prove that the set of all odd integers is enumerable.[2] **(2008)**

SOLUTION:

Let

$$A = \{2n + 1 : n \in \mathbb{Z}\} = \{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$$

এবার আমাদের কাজ হল A-র সব element-কে গুণে ফেলা। সমস্যা হচ্ছে গোণাটা শুরু করি কোথা থেকে! A set-টার তো দুদিকেই "..."! তাই আমরা গোণা শুরু করব মাঝখান থেকে, এবং ক্রমশঃ বাইরের দিকে ছড়িয়ে পড়ব (Fig 15)। আমরা 1-এর উপর আঙুল দিয়ে গুণব 1, তারপর -1-এ আঙুল দিয়ে গুণব 2, তারপর 3-এ আঙুল দিয়ে গুণব 3. এইভাবে আঙুলটাকে বার বার উপরনীচ করে গুণে চলব। লক্ষ কর যে এইভাবে গোণার সময়ে মুখে যখন even number বলছি, তখন আঙুলটা পড়ছে negative number-দের উপরে। আর আঙুল যখন রয়েছে একটা odd number-এর উপরে, তখন আমরা মুখে সেই odd number-টাই বলছি। এই কথাটাকেই নীচের ফর্মুলায় প্রকাশ করা হয়েছে।

Consider the function $f : \mathbb{N} \to A$ defined as

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{if } n \text{ is odd} \\ -n + 1 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

এইবার দেখাব যে এই f-টা একটা bijection, অর্থাৎ one-one এবং onto.

This f is one-one,

মানে গোণার সময়ে আমরা কোনো কিছু ভুলে একাধিকবার গুণে ফেলিনি।

i.e., if $m \neq n$ then $f(m) \neq f(n)$.

⟦ Because:

Case 1: If m, n are both odd, then

$$f(m) = m \neq n = f(n).$$

Case 2: If m, n are both even, then

$$f(m) = -m \neq -n = f(n).$$

Case 3: If exactly one of m, n is odd,
then $f(m) \neq f(n)$, since they have opposite signs.

⟧

এবার দেখাব যে f onto-ও বটে, মানে গুণতে গিয়ে কিছু বাদ দিয়ে যাই নি।

Also, this f is onto.

⟦ Because:

For any $k \in A$, we have
if $k > 0$ then $k = f(k)$,
and
if $k < 0$ then $k = f(1-k)$.

⟧

Thus $f : \mathbb{N} \to A$ is a bijection. Hence A is enumerable, as required.

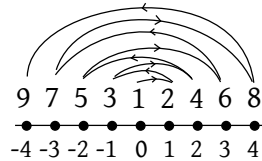
■

Exercise 2: Show that the set of all integers is countable.[3] **(2013.7a)**

HINT:

এই অংকটাও আগেরটারই মত। এখানেও উপর-নীচ করে গুণে যেতে হবে। নানাভাবেই গোণা যায়, একটা কায়দা দেখিয়েছি Fig 16-এ। লক্ষ কর গোণার সময়ে যখন মুখে একটা even সংখ্যা n বলছি (যেমন $0, 2, 4, ...$) তখন আঙুল রাখছি $n/2$-এর উপরে। আর যখন একটা odd সংখ্যা n বলছি তখন আঙুল রাখছি $-(n-1)/2$-এর উপর। সুতরাং এখানে bijection-টা হচ্ছে $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, যেখানে

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{if } n \text{ even} \\ \frac{-(n-1)}{2} & \text{if } n \text{ odd.} \end{cases}$$

Fig 16

এবার বাকিটুকু আগের অংকটার আদলে নিজে নিজে করার চেষ্টা করো। ■

Exercise 3: Give bijections from $\mathbb{N}$ to each of the following sets:
(1) $\{n^2 \;:\; n \in \mathbb{N}\}$, **(2)** $\{4, 5, 6, ...\}$ **(3)** $\{-1, 2, -3, 4, -5, ...\}$
■

DAY 2
General properties

আমরা এই অধ্যায়ের শেষে দেখাব যে $\mathbb{N}$ আর $\mathbb{Q}$-এর cardinality সমান, কিন্তু যদি $a < b$ হয় তবে $(a, b), [a, b], [a, b), (a, b]$-র cardinality মোটেই $\mathbb{N}$-এর cardinality-র সমান নয়। একইভাবে $(a, \infty), [a, \infty), (-\infty, b), (-\infty, b]$ এবং $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$-র cardinality-ও $\mathbb{N}$-এর থেকে আলাদা।
তার মানে $\mathbb{Q}$ হল enumerable, কিন্তু এই সব interval-গুলো নয়। আর $\mathbb{N}$ নিজে তো অবশ্যই enumerable.
কিন্তু এতসব দেখানোর আগে আমাদের enumerable set-দের কিছু ধর্ম শিখতে হবে।

2.1 Subset

আমরা ছোটো infinity, বড় infinity,-র কথা বলেছিলাম মনে আছে? এবার কয়েকটা অংক করব যাদের মূল বক্তব্য হল এই যে enumerable set-রা হল সবচেয়ে ছোটো infinite set. এই কথাটাকে বিভিন্ন দিক থেকে দেখা যেতে পারে। নীচের অংকটায় যেমন আমরা দেখাব যে, যে কোনো infinite set-এর পেটের ভিতরেই একটা enumerable subset পাওয়া যায়।

Example 7: Prove that every infinite subset of $\mathbb{R}$ has a denumerable subset.[3] **(1997)**

SOLUTION: প্রথমে সবকিছুর একটা করে নাম দিয়ে নিই।

> Let $A \subseteq \mathbb{R}$ be an infinite set. We shall show that $\exists B \subseteq A$ such that B is denumerable.

প্রমাণের কায়দাটা হল--আমরা A থেকে একের পর এক element তুলতে থাকব, আর এক দুই করে গুণে যাব কতগুলো তোলা হল। যেহেতু A একটা infinite set, তাই এই তোলার এবং গোণার কোনো শেষ থাকবে না। অতএব যে element-গুলো তুলেছি তাদের নিয়ে একটা denumerable set হবে।

> Here $A \neq \phi$, $\because \phi$ is a finite set, and A is infinite.
> $\therefore \exists a_1 \in A$.

তার মানে আমরা প্রথম যে element-টা তুললাম সেটা হল a_1. এবার এই a_1-কে বাদ দিয়ে আরেকটা element তুলব, a_2.

> $\because A$ is an infinite set,
> $\therefore \exists a_2 \in A$ such that $a_2 \neq a_1$.

এই ভাবে আমরা তুলতেই থাকব। এই কথাটাকে অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখি।

In general, after we have selected distinct elements $a_1, ..., a_n \in A$,
we can select $a_{n+1} \in A$ such that $a_{n+1} \neq a_1, ..., a_n$,

এইখানে "distinct" কথাটা খুব দরকারী। কারণ এতেই বোঝা যাচ্ছে যে আমরা একই জিনিস দুবার গুণে ফেলছি না। কেন আমরা a_{n+1} তুলতে পারব সেটা বোঝা কঠিন নয়--যেহেতু A একটা infinite set, সুতরাং খালি $a_1, .., a_n$ তুলতেই নিশ্চয়ই তার ভাঁড়ার নিঃশেষিত হয়ে যায় নি।

because A is an infinite set.
Continuing in this way we get a subset

$$B = \{a_1, a_2, ...\} \subseteq A.$$

আমরা এবার দাবী করব যে এই B-টা একটা denumerable set. তার জন্য একটা bijection দেখাতে হবে $\mathbb{N}$ থেকে B-তে।

Consider the function $f : \mathbb{N} \to B$ defined as

$$f(n) = a_n.$$

এটা যে একটা bijection সেটা প্রায় বলার অপেক্ষা রাখে না, কিন্তু তাও বিশদ করে প্রমাণ করে দেওয়া ভালো যে এটা onto এবং one-one.

This function is onto.

⟦ Because:

Every element of B is of the form a_n for some $n \in \mathbb{N}$.
So each element is $f(n)$ for some $n \in \mathbb{N}$.

⟧

Also f is one-one.

তার কারণ আমরা কখনো একই element দুবার তুলিনি।

⟦ Because:

If $m < n \in \mathbb{N}$ then by construction $a_n \neq a_m$, *i.e.*, $f(n) \neq f(m)$.

⟧

So $B \subseteq A$ is denumerable, completing the proof.

■

এর পরের অংকটা হল সেই একই বক্তব্যের আরেকটা রূপ--denumerable set-রা সবচেয়ে ছোটো infinite set. এখানে আমরা দেখাব যে, কোনো একটা denumerable set-এর যদি একটা subsetনিই, তবে সেটা হয় denumerable নয় finite হবে, মানে denumerable-এর পেটে denumerable ছাড়া আর কোনো infinite set ঢোকানো যায় না।

Example 8: Prove that any subset of a denumerable set is either finite or denumerable. [3] **(2005)**

SOLUTION: আমাদের দেখাতে বলেছে হয় "finite" নয় "denumerable"। এই রকম "এটা নয় ওটা" জাতীয় প্রমাণকে প্রথমেই "এটা না হলে ওটা হতে বাধ্য" হিসেবে সাজিয়ে লিখে নিলে সুবিধা হয়। আমাদের অংকটাকে এভাবে সাজিয়ে লিখলে দাঁড়াবে--"If a subset of a denumerable set is <u>not</u> finite, then it must be denumerable," অর্থাৎ--

> It is enough to show that any infinite subset of a denumerable set is denumerable.

এবার সবকিছুর একটা করে নাম দিয়ে নিই।

> Let A be a denumerable set, and let $B \subseteq A$ be infinite.
> Shall show that B is denumerable.
> Since A is denumerable, there is a bijection $f : \mathbb{N} \to A$.
> Consider the set $M \subseteq \mathbb{N}$ defined as
> $$M = \{n \in \mathbb{N} \ : \ f(n) \in B\}.$$

এবার আমরা অনেকটা আগের অংকটার মত এগোব, M থেকে একটা একটা করে element নিতে থাকব। কিন্তু element-গুলো যেমন তেমন ভাবে নেব না, প্রথমে সবচেয়ে ছোটোটাকে নেব, তারপরে নেব দ্বিতীয় ছোটোটাকে, এই রকম। ফলে আমরা কখনোই ছোটো element থাকতে বড় element-এ হাত দেব না। এই ভাবে চলার কারণটা শীঘ্রই স্পষ্ট হবে।

> $\because B$ is infinite, $\therefore B \neq \phi$.
> $\therefore M \neq \phi$.
> $\therefore$ By the well-ordering principle there is a minimum element $n_1 \in M$.

এখানে "well-ordering principle"-টা খুবই দরকারী। এর মানে হল-- $\mathbb{N}$-এর যেকোনো nonempty subset-এর মধ্যেই একটা সবচেয়ে ছোটো element আছে।

> Again, $\because B$ is infinite,
> $\therefore B \supsetneq \{f(n_1)\}$, and so $M \supsetneq \{n_1\}$.
> Applying well-ordering principle to
> $M \setminus \{n_1\}$ we get a smallest element
> $n_2 \neq n_1$.
> In general, after picking <u>distinct</u> elements $n_1, ..., n_k \in M$ we can pick n_{k+1} as the least element of $M \setminus \{n_1, ..., n_k\}$, which is nonempty since B is infinite.
> Continuing thus, we get $\{n_i\}_i \subseteq M$, such that $f(n_1), f(n_2), ...$ are <u>distinct</u> elements of B.

আমরা তো $n_1, n_2, ...$-গুলোকে distinct নিয়েছিলাম, কিন্তু তাতে $f(n_1), f(n_2), ...$-গুলো distinct হয়ে গেল কি করে? কারণ, f যে one-one!.
এইবার দেখাব যে B হল denumerable, মানে $\mathbb{N}$ থেকে B-তে একটা bijection দেখাব।

Consider the function $g : \mathbb{N} \to B$ defined as $g(i) = f(n_i)$.

দেখাব যে এই g-টা একটা bijection, অর্থাৎ one-one এবং onto.

This g is one-one.

[[Because:

For any $i \neq j \in \mathbb{N}$ we have $n_j \neq n_i$, since n_i's are distinct.
Hence $f(n_j) \neq f(n_i)$, since f is one-one.
Thus, $g(j) \neq g(i)$.

]]

এইবার onto দেখানোর পালা। আমরা যখন M থেকে একটা একটা করে element তুলছিলাম তখন প্রথমে ছোটোগুলোকে দিয়ে শুরু করেছিলাম। সেটা এখানে কাজে লাগবে।

Also g is onto.

[[Because:

Take any $b \in B$.
Then $b = f(k)$ for some $k \in M$.

কারণ $B \subseteq A$, আর A-র প্রতিটি element-ই $f(k)$ টাইপের। আবার $f(k) \in B$ হলে $k \in M$ হবে, কারণ সেভাবেই M-কে বানানো হয়েছে।

Let, if possible,

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad g(i) \neq b.$$

This means $f(n_i) \neq f(k)$,
or $n_i \neq k$.

কারণ $n_i = k$ হলে তো $f(n_i) = f(k)$-ও হত!

Now $n_{k+1} > n_k > \cdots > n_1 \geq 1$.

কারণ আমরা ছোটো থেকে বড় তুলেছিলাম। n_1 ছিল প্রথম তোলা সংখ্যাটা, তাই সবার থেকে ছোটো, n_2 তার থেকে একটু বড়। এখন $n_1 \geq 1$ তো হতেই হবে, সুতরাং $n_2 \geq 2$. একইভাবে $n_3 \geq 3$, ইত্যাদি।

So $n_{k+1} \geq k+1 > k$.
But by construction, n_{k+1} is the least element of

$$M \setminus \{n_1, ..., n_k\}$$

which is impossible, since $k \in M \setminus \{n_1, ..., n_k\}$.

]]

এই জায়গাটা গোলমেলে ঠেকা আশ্চর্য নয়। যেটা বলা হচ্ছে তা হল যখন $n_1, ..., n_k$ তোলা হয়ে গেছে, এবং আমরা $M \setminus \{n_1, ..., n_k\}$ থেকে n_{k+1} তুলতে যাচ্ছি, তখন $M \setminus \{n_1, ..., n_k\}$-র মধ্যে k থাকলে, আমরা খামোখা কেন তার চেয়ে বড় n_{k+1}-কে তুলতে যাব? আমরা তো প্রত্যেক ধাপে সবচেয়ে ছোটো element-টা তুলছি!

> Thus $g : \mathbb{N} \to B$ is a bijection, and hence B is denumerable, as required.

■

Exercise 4: Let T be an enumerable set in $\mathbb{R}$ and $S \subseteq T$. Prove that S is either finite or enumerable.[3] **(2008)**
HINT:
আগের অংকটাই, খালি denumerable না বলে enumerable বলেছে। ■

Exercise 5: Prove that any subset of a countable set is countable. ■

Exercise 6: Prove that every subset of a countably infinite set of real numbers is countable.[3] **(2012.5a)** ■

Exercise 7: Prove that the set of all positive prime numbers is enumerable. ■

Exercise 8: Let $A \subseteq \mathbb{N}$ be such that there is a one-one function from $\mathbb{N}$ to A. Show that A must be enumerable. ■

Exercise 9: Prove that there is a bijection from $\mathbb{N}$ to $A = \{2^m 3^n \ : \ m, n \in \mathbb{N}\}$. ■

2.2 Union

এবার যে দুটো অংক করব তার জন্য একটু প্রস্তুতি দরকার। ধরো তোমাকে দেখাতে বলল যে একটা set A হচ্ছে countable. তার জন্য এটা দেখানোই যথেষ্ট যে, A থেকে $\mathbb{N}$-এ একটা one-to-one function আছে। কেন, সেটা বোঝা যাক--
ধরো $h : A \to \mathbb{N}$ একটা one-to-one function.

- তবে $h : A \to h(A)$ অবশ্যই one-to-one এবং onto, তার মানে bijection.
- সুতরাং A এবং $h(A)$ হল equipotent (অর্থাৎ ওদের সাইজ সমান)।
- কিন্তু $h(A) \subseteq \mathbb{N}$, আর আমরা জানি যে $\mathbb{N}$-এর subset-রা countable হয়। সুতরাং $h(A)$ নিশ্চয়ই countable.
- এদিকে আমরা জানি যে A আর $h(A)$ হচ্ছে equipotent, ফলে A-ও countable হতে বাধ্য।

এই যুক্তিপরম্পরাটা ভালো করে বুঝে নাও। নীচের দুটো অংকেই এটা কাজে লাগবে। যদি আরও দেওয়া থাকে যে A হল একটা infinite set, তবে একই যুক্তি থেকে পাব যে, A হল countably infinite মানে enumerable.
আরেকটা ছোট্টো জিনিস মনে করিয়ে দিই, যদি 2-এর কোনো power নিই 2^n $(n \in \mathbb{N})$ আর 3-এর কোনো power নিই 3^m $(m \in \mathbb{N})$ তবে এরা কখনও সমান হতে পারে না। এখানে $2, 3$-এর জায়গায় যে কোনো দুটো prime সংখ্যা নিলেও একই কথা বলা চলত।

Example 9: Prove that the union of two enumerable sets in $\mathbb{R}$ is enumerable.[3] **(2011,2008)**

SOLUTION:

> Let A, B be two enumerable subsets of $\mathbb{R}$,
> *i.e.*, there are bijections $f : A \to \mathbb{N}$ and $g : B \to \mathbb{N}$.
> Shall show that $A \cup B$ is enumerable.

লক্ষ কর যে A, B দুজনেই infinite (যেহেতু enumerable). সুতরাং $A \cup B$-ও infinite. আমরা এক্ষুণি বললাম যে কোনো infinite set-কে enumerable দেখানোর জন্য সেই set থেকে $\mathbb{N}$-এ একটা one-to-one function দেখাতে পারাই যথেষ্ট। সেরকম একটা function তৈরী করি--

> Define $h : A \cup B \to \mathbb{N}$ as
> $$h(x) = \begin{cases} 2^{f(x)} & \text{if } x \in A \\ 3^{g(x)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$h(x)$-এর চেহারা দেখে খাবি খেও না। কি হচ্ছে সেটা বোঝার জন্য Fig 17 দ্যাখো। এখানে দুটো set A, B দেখিয়েছি। অংকে বলে দেয় নি যে set দুটোর কোনো intersection নেই, তাই আমরা A, B-র খানিকটা intersection রেখেছি। A, B দুজনেই enumerable, মানে $1, 2, 3, \ldots$ করে গুণে ফেলা যায়। Fig 17-এ একভাবে গোণার কায়দা দেখানো আছে, এরাই হল f আর g.
এবার h function-টা কি করে পেলাম বলি (Fig 18). আমরা প্রথমে A-র point-গুলোকে গুণব, কিন্তু $1, 2, \ldots$ করে নয়, $2^1, 2^2, \ldots$ এইভাবে। তার পর B-র point-গুলোকে গুণব (যেগুলো বাকী আছে)। এবারও $1, 2, ..$ করে গুণব না, গুণব $3^1, 3^2, \ldots$ এইভাবে।
এইরকম বিদ্ঘুটেভাবে কেন গুণলাম? যাতে, কোনো সংখ্যা দুবার না আসে। যদি A, B দুজনকেই $1, 2, \ldots$ করে গুণতাম তবে $1, 2 \ldots$ সংখ্যাগুলো সব দুবার করে আসত (একবার A-র জন্য, একবার B-র জন্য)। আমাদের এই গোণায় কোনো সংখ্যা দুবার আসে নি, তার মানে h হল one-to-one, ঠিক যেমনটা চাইছিলাম।

> This h is 1-to-1,
> *i.e.*, if $x \neq y$ then $h(x) \neq h(y)$.

Fig 17

A B

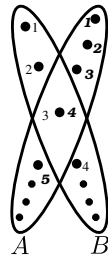
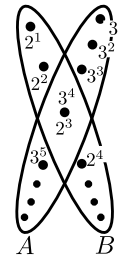



Fig 18

⟦ Because:

If $x, y \in A$ then

$$h(x) = 2^{f(x)} \neq 2^{f(y)} = h(y),$$

since f is 1-to-1.
If $x, y \in B$ then

$$h(x) = 3^{g(x)} \neq 3^{g(y)} = h(y),$$

since g is 1-to-1.
If exactly one of x, y is in A, then one of $h(x), h(y)$ is a positive power of 2, and the other is a positive power of 3. So $h(x) \neq h(y)$.

⟧

এবার আমাদের সেই যুক্তিপরম্পরা, যার কথা একটু আগেই বললাম--

Also, by definition, h is onto $h(A \cup B)$.

So $h : A \cup B \to h(A \cup B)$ is a bijection.

So $A \cup B$ and $h(A \cup B)$ are equipotent.

Now

A is infinite [$\because$ denumerable]
$\implies A \cup B$ is infinite [$\because A \subseteq A \cup B$.]
$\implies h(A \cup B)$ is infinite [$\because A \cup B$ and $h(A \cup B)$ are equipotent]
$\implies h(A \cup B)$ is denumerable [$\because h(A \cup B) \subseteq \mathbb{N}$ is infinite]
$\implies A \cup B$ is denumerable [$\because A \cup B$ and $h(A \cup B)$ are equipotent],

as required.

■

Example 10: Prove that union of countable number of countable subsets of $\mathbb{R}$ is countable.[5] **(2009)**

SOLUTION: এই অংকের সমাধানটা বোঝার জন্য আগের অংকের সমাধানটা ভালো করে পড়া থাকলে সুবিধা হবে। সেখানে আমরা দুটো prime নিয়ে কাজ করেছিলাম, আর এখানে যাবতীয় prime নিয়ে কাজ করব। মূল কায়দাটা একেবারেই এক থাকবে।

Let $\{A_i \;:\; i \in I\}$ be a countable collection of countable sets,
i.e., I is a countable index set, and each A_i is a countable set.

এখানে index set-এর ব্যাপারটা একটু বোঝা যাক। যদি তিনটে set থাকত, A_1, A_2, A_3, তবে আমরা তিনজনকে একসঙ্গে লিখতে পারতাম

$$\{A_i \;:\; i \in \{1, 2, 3\}\}.$$

এখানে $\{1,2,3\}$ হল index set. যদি $A_1, A_2, ...$ এই ভাবে চলতেই থাকত, তবে index set-টা নিতাম $\mathbb{N}$.

> Shall show that
> $$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$
> is countable.

আমরা জানি যে এর জন্য একটা one-one function $h : A \to \mathbb{N}$ আছে দেখালেই চলবে। আমরা প্রথমে এরকম একটা function বানাব, তারপর দেখাব যে সেটা সত্যিই one-one, এবং অবশেষে আমাদের সেই যুক্তিপরম্পরাটা লিখে দেব। প্রথম কাজ $h : A \to \mathbb{N}$ তৈরী করা--

> Since I is countable, so there is a one-one function $f : I \to \mathbb{N}$.

হুঁশিয়ার! এখানে কিন্তু one-one function লিখেছি, bijection লিখিনি। I যদি enumerable হত তবে লিখতাম bijection. কিন্তু এখানে I খালি countable, মানে enumerable বা finite. তাই খালি one-one লিখেছি। কারণ, "a set A is countable" মানে "there is a one-one function $f : A \to \mathbb{N}$."

> Let $P \subseteq \mathbb{N}$ be the set of all primes. Then P is an infinite subset of $\mathbb{N}$, and hence denumerable.
> So there is a one-one function $p : I \to P$.

কারণ I থেকে $\mathbb{N}$-এ একটা one-one function আছে, আর $\mathbb{N}$ থেকে P-তে একটা bijection আছে। দুটোকে মিলিয়ে p function-টা তৈরী হয়েছে। এই কথাটা যদি শক্ত লাগে তবে একটা উদাহরণ নাও। ধরো I হল finite যেমন

$$I = \{\text{চেয়ার, টেবিল, খাট}\}.$$

কটা element আছে, তিনটে। কি করে জানলে? গুণে দেখলে, মানে I থেকে $\mathbb{N}$-এ একটা one-one function–

$$\begin{array}{rcl} \text{চেয়ার} & \mapsto & 1 \\ \text{টেবিল} & \mapsto & 2 \\ \text{খাট} & \mapsto & 3. \end{array}$$

এবার বল তো প্রথম তিনটে prime সংখ্যা কি কি? উত্তর হল $2, 3$ আর 5. এই দুটো জিনিস মিলিয়ে পাচ্ছি $p : I \to P$ এইভাবে--

$$\begin{array}{rcl} p(\text{ চেয়ার }) & = & \text{1-নম্বর prime } = 2, \\ p(\text{ টেবিল }) & = & \text{2-নম্বর prime } = 3, \\ p(\text{ খাট }) & = & \text{3-নম্বর prime } = 5. \end{array}$$

এবার বোঝা গেল p নামের function-টা কি জিনিস?
এইবার আমরা একটা function $h : A \to \mathbb{N}$ তৈরী করব যেটা one-one হবে। প্রথমে লক্ষ কর যে, $\because A = \cup_i A_i$, তাই কোনো $a \in A$ নিলে এমন i পাব যাতে $a \in A_i$ হয়।

> $\because \forall i \in I \quad A_i$ is countable,
> $\therefore$ there is a one-one function $f_i : A_i \to \mathbb{N}$.
> Define $h : A \to \mathbb{N}$ as $h(a) = p(i)^{f_i(a)}$, where $a_i \in A_i$.

▪

এইবার দেখাব যে এই h-টা one-one.

> This h is one-one.
>
> [[Because:
>
> If $a \neq b \in A$, then
>
> $$h(a) = p(i)^{f_i(a)} \text{ and } h(b) = p(j)^{f_j(b)},$$
>
> where $a \in A_i,\ b \in A_j$ and
>
> $$f_i : A_i \to \mathbb{N} \text{ and } f_j : A_j \to \mathbb{N}$$
>
> are one-one.
> Now, if $i \neq j$ then $h(a), h(b)$ are positive powers of distinct primes, and hence $h(a) \neq h(b)$.
> Again, if $i = j$, then
>
> $$h(a) = p(i)^{f_i(a)} = p(i)^{f_j(a)} \neq p(i)^{f_j(b)} = h(b),$$
>
> since $a \neq b$ and f_j is one-one.
>
>]]

এইবার আমাদের সেই যুক্তিপরম্পরা--

> $\because h : A \to \mathbb{N}$ is one-one,
> $\therefore A$ and $h(A)$ are equipotent.
> But $h(a) \subseteq \mathbb{N}$, and so is countable,
> $\therefore A$ must be countable, as required.

■

Example 11: Let S be an enumerable set in $\mathbb{R}$ and T be an infinite nonenumerable set in $\mathbb{R}$. Correct or justify: $T \cup S$ is a nonenumerable set.[2] **(2007)**

SOLUTION:

> Yes, $T \cup S$ must be nonenumerable.
> Let, if possible, $T \cup S$ be enumerable.
> Then $T \subseteq T \cup S$ is an infinite subset of an enumerable set.
> So T must be enumerable ($\Rightarrow\Leftarrow$, $\because T$ is assumed to be nonenumerable).
> So $T \cup S$ must be nonenumerable.

■

এরপরের অংকটা আমরা আগেই একবার করেছি Exercise 2-এ। এখানে আরেকভাবে করি--

Example 12: Show that the set of all integers is countable.[3] **(2013.7a)**

SOLUTION:

> We know that $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\}(-\mathbb{N})$.
>
> Now $\mathbb{N}$ is countable, because $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ defined by $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n$ is a bijection.
>
> Also $-\mathbb{N}$ is countable, because $g : \mathbb{N} \to (-\mathbb{N})$ defined by $\forall n \in \mathbb{N} \quad g(n) = -n$is a bijection.
>
> Also $\{0\}$ is a finite set, and hence countable.
>
> We know that countable union of countable sets is countable. So $\mathbb{Z}$ which is the union of 3 countable sets is countable, as required.

■

2.3 Product

Example 13: If A is an enumerable set, then show that $A \times A$ is also an enumerable set.[3] **(2007)**

SOLUTION:

এই অংকটা আমরা দুভাবে করব। প্রথমে 335 পাতার Example 10-এর মত, prime number ব্যবহার করে। তারপরে আবার একই অংক করব এই তথ্যটা ব্যবহার করে যে

"Union of an enumerable collection of enumerable sets is enumerable."

দ্বিতীয় প্রমাণটা অনেক সংক্ষিপ্ত হবে।

> First proof:
>
> We know that the set P of all primes is an infinite subset of $\mathbb{N}$, and hence is enumerable.
>
> Since A is enumerable, so there is a bijection $p : A \to P$.
>
> Now consider the function $g : A \times A \to \mathbb{N}$ defined as
>
> $$g(a, b) = p(a)^{p(b)}.$$
>
> This g is one-one.

⟦ Because:

If $(a,b) \neq (c,d) \in A \times A$, then
either $a \neq c$
or $a = c$ and $b \neq d$.
If $a \neq c$, then $p(a) \neq p(c)$, since p is one-one.
So $g(a,b) \neq g(c,d)$ since they are powers of distinct primes.
Again, if $a = c$ and $b \neq d$, then

$$g(a,b) = p(a)^{p(b)} = p(c)^{p(b)} \neq p(c)^{p(d)} = g(c,d),$$

since $p(b) \neq p(d)$, as p is one-one.

⟧

So $g : A \times A \to g(A \times A)$ is bijective (since it is onto by construction).

Thus, $A \times A$ and $g(A \times A)$ are equipotent.

Also, since A is infinite, $A \times A$ is infinite,

and so $g(A \times A)$ is an infinite subset of $\mathbb{N}$.

Thus $g(A \times A)$ is enumerable.

Hence $A \times A$ is enumerable.

এবার দ্বিতীয় প্রমাণ--

Second proof:

We have

$$A \times A = \bigcup_{a \in A} (\{a\} \times A),$$

where

$$\{a\} \times A = \{(a,x) \ : \ x \in A\}.$$

Now for each $a \in A$ the sets A and $\{a\} \times A$ are equipotent, since $f : A \to \{a\} \times A$ defined as

$$f(x) = (a,x)$$

is a bijection.

Thus, each $\{a\} \times A$ is enumerable (since A is enumerable).

Hence

$$A \times A = \bigcup_{a \in A} (\{a\} \times A)$$

is the union of an enumerable collection of enumerable sets, and hence is enumerable.

■

DAY 3
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}^c$ and intervals

3.1 $\mathbb{Q}$ enumerable

এবার আমরা দেখাব যে $\mathbb{Q}$ হল enumerable. Rational number-দের ব্যাপারে আমরা Pythagoras-এর কাহিনী বলেছিলাম। Rational number ছাড়া যে কোনো সংখ্যা হয়, এটা জেনে মানুষ ভারী আশ্চর্য হয়ে গিয়েছিল। সেটা ছিল যীশুখ্রীষ্টের জন্মের 500 বছর আগের কথা। আর আধুনিক যুগের মানুষ আশ্চর্য হয়ে গিয়েছিল এইটা জেনে যে $\mathbb{Q}$ হল enumerable, সেটা 1873 সালের কথা। এ বইয়ের ষষ্ঠ অধ্যায়ে Georg Cantor-এর কথা বলেছিলাম? এইটাও সেই তাঁরই কাজ।

কিন্তু $\mathbb{Q}$ যদি enumerable হয় তাতে আশ্চর্য হবার আছেটা কি? আগে সেই কারণটা বলে নিয়ে তারপর আমরা প্রমাণটা শুরু করব। আমরা ইতিমধ্যেই কয়েকটা enumerable set দেখেছি, যেমন $\mathbb{N}$ স্বয়ং, যাবতীয় even number-এর set, যাবতীয় odd number-এর set এই সব। এরা enumerable, কারণ এদের element-গুলোকে পরপর গুণে ফেলা যায়।

গোণার কথা ভাবলেই আমাদের মনে যে চিত্রটা ভেসে ওঠে সেটা হল অনেকগুলো জিনিস একটু অন্তর অন্তর পর পর সাজানো, যাদের উপর আঙুল রেখে রেখে আমরা গুণতে পারি। যদি তোমাকে একবাটি দুধ দিয়ে দুধের কণাগুলো সব গুণতে বলি, তবে সেটা অসম্ভব কারণ কণাগুলো সব একাকার হয়ে মিশে আছে, এইটা প্রথম কণা, তারপর খানিকদূরে ওইটা দ্বিতীয় কণা এমনটা বলার জো নেই।

এবার ভেবে দ্যাখো--$\mathbb{Q}$ অনেকটা এই দুধের বাটির মতো নয় কি? কারণ আমরা জানি যে $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$, অর্থাৎ যদি যে কোনো দুটো $a, b \in \mathbb{R}$ নিই $(a < b)$ তবে ওদের মাঝখানে একটা rational number পাব। এবার ধর আমরা $\mathbb{Q}$-কে গুণে ফেলার চেষ্টা করছি। মনে কর গোণা শুরু করব 0 থেকে, তাই প্রথমে শূন্যর উপর আঙুল রেখে গুণলাম 1. কিন্তু এর পর আঙুল কোথায় রাখব? 0-র ঠিক পরের rational number-টা কি? 0.1? না, তার আগে 0.01 আছে! তারও আগে আছে 0.001, কিন্তু সেটারও আগে আছে 0.0001. বুঝতেই পারছ যে "0-র ঠিক পরের rational number" বলে কিছু হয় না। Rational number-রা একাকার হয়ে মিশে আছে, কতকটা যেন দুধের বাটিতে দুধের কণাগুলোর মত। এটা থেকে হঠাৎ মনে হয় যে তাহলে $\mathbb{Q}$ enumerable নয়। সুতরাং যখন শেষ পর্যন্ত প্রমাণ হল যে $\mathbb{Q}$ আসলে enumerable, তখন যে কেন সবাই আশ্চর্য হয়ে গিয়েছিল সেটা এবার বুঝতে পারছো।

ব্যাপারটা যতই অদ্ভুত হোক, প্রমাণটা কিন্তু তেমন জটিল নয়। খালি একটা ব্যাপার মাথায় রাখলেই হবে--তোমাকে তো কেউ বলে নি যে ছোটো থেকে বড় এইভাবেই গুণতে হবে, তুমি গোণার সময়ে অবশ্যই আগুপিছু করতে পারো। ঠিক কি ভাবে গুণলে কাজটা হবে সেটাই হল প্রমাণের আসল প্যাঁচ।

Example 14: Prove that the set of all positive rational numbers is a denumerable set.[2] **(2001)**

SOLUTION: Positive rational number-দের set (যাকে আমরা $\mathbb{Q}^+$ লিখব) মানে হল সব $\frac{p}{q}$ জাতীয় সংখ্যা, যেখানে $p, q \in \mathbb{N}$. এরকম কয়েকটা সংখ্যার উদাহরণ রয়েছে Fig 19-এ। কিন্তু আমরা এরকম অগোছালো করে ভাবব না। আমরা $\mathbb{Q}^+$-এর elementদের Fig 20-এর মত করে সাজাব-- প্রথমে সেই সব সংখ্যা যাদের denominator হল 1, তারপর সেই সব সংখ্যা যাদের denominator হল 2, এইরকম করে। লক্ষ কর এতে $\mathbb{Q}^+$-এর সবাইকেই হিসেবে নেওয়া হল (সকলেই অবশ্যই একাধিক দলে ঢুকে পড়েছে, যেমন 1 একবার $\frac{1}{1}$ হিসেবে A_1-এ, এবং পরে আবার $\frac{2}{2}$ রূপে A_2-তে রয়েছে)। কিন্তু তাতে আমাদের দুশ্চিন্তা নেই, কোনো positive rational number যে বাদ যায় নি এতেই আমরা খুশী।

Define for $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, ...\}.$$

Then each A_n is denumerable,

since $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ defined by

$$f_n(i) = \frac{i}{n}$$

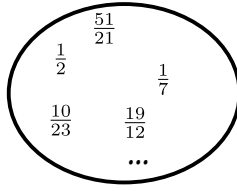
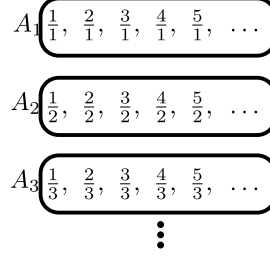



Fig 19 **Fig 20**

> is a bijection.

এইবার আমরা যে কথাটা ব্যবহার করব সেটা হল

"The union of a denumerable collection of denumerable sets is denumerable."

মনে আছে আশা করি যে, এই কথাটা আমরা গতকাল প্রমাণ করেছিলাম।

> Also the set of all positive rational numbers is
>
> $$\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$
>
> which is the union of a denumerable collection of denumerable sets, and hence is denumerable, as required.

■

Exercise 10: Prove that the set of all negative rational numbers is an enumerable set.[2] **(2011.5b)**
HINT:
একেবারেই আগের অংকের মত। এখানে $A_n = \{-\frac{1}{n}, -\frac{2}{n}, ...\}$ নিতে হবে। ■

Example 15: Prove that the set of all rational numbers is denumerable.[3] **(1998,2003,2006,2008)**

SOLUTION: প্রথমে ?? নম্বর অংকের মতই দেখাতে হবে যে the set of all *positive* rational numbers is a denumerable set. তারপর এগোতে হবে এইভাবে--

> We have $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$.
>
> Now, $\mathbb{Q}^+$ and $\mathbb{Q}^-$ are equipotent, because $f : \mathbb{Q}^- \to \mathbb{Q}^+$ defined as $f(x) = -x$ is a bijection.
>
> Thus, $\mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}^+$ are both denumerable.
>
> Hence $\mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+$. is enumerable.

Also, $\{0\}$ is a finite set.

So $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ is enumerable, as required.

■

$\mathbb{Q}$ যে একই সঙ্গে dense এবং countable, এই ব্যাপারটা যে বিস্ময়কর তা বলেছি। কিন্তু এটা খুব গুরুত্বপূর্ণও বটে। এর ফলে কয়েকটা জিনিস প্রমাণ করা যায়, যেগুলো অন্যভাবে হত না। এবার এরকম একটা উদাহরণ দেখি।

Example 16: Show that any collection of nonempty, disjoint, open subsets of $\mathbb{R}$ must be countable.

SOLUTION: আমাদের দেখাতে হবে যে $\mathbb{R}$-এর মধ্যে এমন কোনো uncountable collection থাকতে পারে না, যার প্রতিটি সদস্যই nonempty, open, এবং যাদের মধ্যে কোনো intersection নেই। আমরা এখানে contradiction লাগাব।

Let, $\{A_i \ : \ i \in I\}$ be any collection of sets in $\mathbb{R}$, such that

- $\forall i \in I \quad A_i \neq \phi$ and A_i is open in $\mathbb{R}$,
- $\forall i \neq j \in I \quad A_i \cap A_j \neq \phi$.

এইবার দেখাব যে I-কে countable হতে হবে। তার জন্য এই উপমাটা মাথায় রাখলে সুবিধা হবে। মনে কর তুমি কিছু বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করবে। তোমার কাছে দশটা রসগোল্লা আছে, আর প্রত্যেক বন্ধুকে অন্ততঃ একটা রসগোল্লা দিতে হবে। তবে নিমন্ত্রিতের সংখ্যা নিশ্চয়ই দশ বা তার কম হতে হবে। এখানে রসগোল্লার জায়গায় rational number আর নিমন্ত্রিতের জায়গায় A_i-গুলো।

Shall show that I must be a countable set.

Since each A_i is nonempty and open, and since $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$,

there must be a rational $q_i \in A_i$.

অর্থাৎ প্রত্যেকটা A_i-এর পাতে অন্ততঃ একটা করে rational পড়বেই। এদিকে rational তো আছেই খালি countable-সংখ্যক। অতএব A_i-দের সংখ্যাও countable হতে বাধ্য! এবার সেই কথাটাই অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখব।

Let $B = \{q_i \ : \ i \in I\}$.

Consider the function $f : I \to B$ defined as $f(i) = q_i$

It is onto by definition.

Also, it is one-one.

⟦ Because:

$\because A_i$'s are disjoint,

$\therefore q_i$'s are distinct.

⟧

So $f : I \to B$ is a bijection.

So I and B are equipotent.

But $B \subseteq \mathbb{Q}$ and $\mathbb{Q}$ is countable.

So B is countable.

So I is countable, as required.

■

এই একই জিনিস এবার একটু অন্যরূপে দেখব।

Example 17: The function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is monotonic in $[a, b]$. Prove that the set of points of discontinuities of f in $[a, b]$ is a countable set.[3] **(2011.6b)**

SOLUTION: প্রথমে লিখে নিই কি দেখাতে হবে--

Let $I =$ set of discontinuities of f in $[a, b]$.
Shall show that I is countable.

ধরো $f(x)$ হল একটা increasing function (যদি decreasing হত তাহলেও প্রমাণটা একই যুক্তিতে হত)। তাহলে তার গ্রাফটা দেখতে হত Fig 21-এর মত কিছু একটা হত। লক্ষ কর গ্রাফটা খানিকটা করে টানা ওঠে, তারপরে হঠাৎ তিড়িং করে একটা লাফ দেয়, আবার টানা ওঠে, আবার লাফ দেয়, এইরকম। এইরকমটা যে হতে বাধ্য তার কারণটা আগে লিখে নিই--

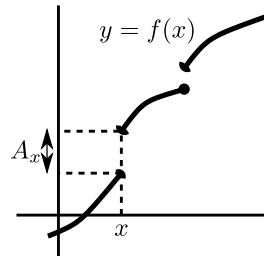
$\because f(x)$ is monotonic (say increasing),
$\therefore \forall x \in [a, b] \quad f(x-)$ and $f(x+)$ exist (finitely), and $f(x-) \leq f(x) \leq f(x+)$.

অর্থাৎ সবগুলো discontinuity-ই jump discontinuity হবে। এটা আমরা সপ্তম অধ্যায়ে প্রমাণ করেছিলাম। যদি দুটো $\leq$-এর মধ্যে একটাও $<$ হয়, তবেই discontinuity পাব। তার মানে x যদি একটা point of discontinuityহয়, তবে $f(x-) < f(x+)$ হবে, আর $f(x+) - f(x-)$ হবে লাফের পরিমাণটা।

For $x \in I$ let $A_x = \big(f(x-), f(x+)\big)$.
Then A_x is nonempty and open.
Also, $\because f(x)$ is monotonic,
$\therefore x \neq y \in I$ we have $A_x \cap A_y \neq \phi$.

এবার ঠিক আগের অংকের যুক্তিটাই লাগাব--

Since $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$,
there must be a rational $q_x \in A_x$.
Let $B = \{q_x \ : \ x \in I\}$.

Fig 21

Consider the function $f : I \to B$ defined as $f(x) = q_x$
It is onto by definition.
Also, it is one-one.

⟦ Because:
$\because A_x$'s are disjoint,
$\therefore q_x$'s are distinct.
⟧

So $f : I \to B$ is a bijection.
So I and B are equipotent.
But $B \subseteq \mathbb{Q}$ and $\mathbb{Q}$ is countable.
So B is countable.
So I is countable, as required.

■

3.2 $(0, 1), [0, 1]$ nonenumerable

এই বইয়ের ষষ্ঠ অধ্যায়ে terminating আর nonterminating decimal expansion-এর কথা শিখেছিলাম, মনে আছে? সেই যে Georg Cantor নামের সেই মজাদার ভদ্রলোকের কাজটা? এবার যে অংকটা শিখব সেটাও একই ভদ্রলোকের মস্তিষ্কপ্রসূত। এবং এখানে decimal expansion-এর ব্যাপারটা লাগবে। একটু মনে করিয়ে দিই।
আমরা জানি যে $\frac{1}{2}$-কে লেখা যায় 0.5. একে বলে $\frac{1}{2}$-এর decimal expansion. এখানে point-এর পরে খালি একটাই সংখ্যা আছে। যেসব decimal expansion-এ point-এর পরে খালি finite সংখ্যক সংখ্যা থাকে, তাদের বলে **terminating decimal expansion**, যেমন 0.23 বা 12.3784. অনেক সংখ্যার কোনো terminating decimal expansion থাকে না, যেমন $\frac{1}{3}$. এর decimal expansion হল $0.333\cdots$ আরেকটা উদাহরণ হল $\sqrt{2} = 1.414....$ এরকম decimal expansion-দের বলে **nonterminating decimal expansion**. ষষ্ঠ অধ্যায়েই শিখেছিলাম যে, সব সংখ্যার terminating decimal expansion না থাকলেও, প্রত্যেকেরই একটা করে nonterminating decimal expansion থাকে, যেমন $\frac{1}{2}$-কে আমরা $0.4999\cdots = 0.4\dot{9}$ হিসেবেও লিখতে পারি। এইটা হল $\frac{1}{2}$-এর nonterminating decimal expansion. যেকোনো terminating decimal expansion-কেই nonterminating decimal expansion-এর পরিণত করা যায় এইভাবে--শেষ সংখ্যাটাকে 1 কমিয়ে তার পরে $999\cdots$ জুড়ে দাও, যেমন

$$0.23\underline{4} = 0.23\underline{3}999\cdots.$$

আমরা ষষ্ঠ অধ্যায়ে দেখেছি যে, যে কোনো real number-এরই unique nonterminating decimal expansion আছে, অর্থাৎ সব real number-কেই nonterminating decimal expansion হিসেবে ঠিক একভাবেই লেখা যায়। বিপরীতপক্ষে nested interval theorem বলে যে, যে কোনো nonterminating decimal expansion-ই একটা unique real number-কে বোঝায়।

Example 18: Show that the interval $(0, 1)$ is not denumerable.[3] **(2000)**

SOLUTION: এক্ষুণি যে কথাটা বললাম সেটা গোড়ায় লিখে নিই, কারণ এই অংকে এটা ব্যবহার করব।

We shall use the fact that every real number has <u>unique</u> <u>nonterminating</u> decimal expansion, and every nonterminating decimal expansion specifies a

> unique real number.

আমরা proof by contradiction করব--

> Let, if possible, $(0, 1)$ be denumerable.
> Then there is a bijection $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$.

তার মানে দাবী করা হচ্ছে যে $f(1), f(2), f(3), \ldots$ হল $(0, 1)$-এর সব সংখ্যার একটা সম্পূর্ণ তালিকা। এবার আমরা একটা "ম্যাজিক সংখ্যা" $x \in (0, 1)$বার করব যেটা এই তালিকায় নেই। তার মানে তালিকাটা মোটেই সম্পূর্ণ নয়-- এবং সেটা হবে একটা contradiction!
এই "ম্যাজিক x"-টাকে তৈরী করব একটু কায়দা করে--

> For each $n \in \mathbb{N}$ let the nonterminating decimal expansion of $f(n)$ be
>
> $$f(n) = 0.d_{n,1}d_{n,2}d_{n,3}\ldots$$

যেমন ধরো যদি $f(5) = \frac{1}{4}(= 0.25 = 0.2499\ldots)$ হয় তবে নেব

$$d_{2,1} = 2, \quad d_{2,2} = 4, \quad d_{2,3} = 9, \quad d_{2,4} = 9, \ldots$$

এইবার এই সব decimal expansion-গুলোকে একটার নীচে একটা লিখি। তাহলে Fig 22(a)-এর মত কিছু একটা তালিকা পাব, যেটা অনেকটা একটা matrix-এর মত দেখতে। এবার যেটা করব সেটা একটা অদ্ভুত কৌশল। এই matrix-এর diagonal-এর উপরে যে সংখ্যাগুলো রয়েছে সেগুলো নিয়ে আমরা কাজ করব। Fig 22(a)-তে এদের underline করে দেখিয়েছি। এই সংখ্যাগুলোকে আমরা আবার আলাদা করে দেখিয়েছি Fig 22(b)-র উপরের লাইনে। এবার এই diagonal-এ যেখানে যেখানে 1 আছে, সেগুলোকে 2 করে দেব, আর বাকী সংখ্যাগুলোকে 1 করে দেব। ফলে পাব Fig 22(b)-এর দ্বিতীয় লাইনটা। এর আগে একটা একটা "0." লাগিয়ে নিলে আমরা একটা সংখ্যা পাব $(0, 1)$-এর মধ্যে, এটাই আমাদের সেই "ম্যাজিক x."

> Then consider the number with decimal expansion
>
> $$x = 0.e_1e_2e_3\ldots, \qquad (*)$$
>
> where
>
> $$e_n = \begin{cases} 2 & \text{if } d_{nn} = 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Fig 22

.<u>1</u>152343...
.2<u>4</u>52670...
.21<u>6</u>5787...
.435<u>1</u>343...
.0984<u>2</u>12...

(a)

.14612...
↓
.21121...

(b)

আবার Fig 22(a)-র তালিকার দিকে চোখ ফেরাও। এই যে x-টা পেলাম সেটা কি এই তালিকার প্রথম সংখ্যাটা হতে পারে? না, কারণ point-এর পর প্রথম সংখ্যাতেই ওরা আলাদা। x কি তালিকার দ্বিতীয় সংখ্যাটা হতে পারে? না, কারণ point-এর পরে দ্বিতীয় সংখ্যাটাতে মিলবে না। এইভাবে দেখা যাচ্ছে যে x তালিকার কোনো সংখ্যার সাথেই সমান নয়, তার মানে x তালিকা-বহির্ভুত একটা সংখ্যা।

> Then clearly $x \in (0,1)$ with unique nonterminating expansion (*).
>
> But since
>
> $$\forall n \quad e_n \neq d_{nn},$$
>
> so $\nexists n \in \mathbb{N}$ with $f(n) = x (\Rightarrow\Leftarrow$ because f was assumed to be onto $(0,1))$.
>
> This proves that $(0,1)$ cannot be enumerable.

■

Exercise 11: Prove that the set of real numbers in $[0,1]$ is not denumerable.[3] **(2002,2004,2007)**
HINT:
আগের অংকটার সমাধান এখানেও খাটবে। ■

Example 19: If $a < b$ then show that the interval $[a,b]$ is uncountable.[4] **(2010.2b)**

SOLUTION:

> Step 1: Shall show that $[0,1]$ is uncountable.
>
> Step 2: Shall show that $[a,b]$ is equipotent with $[0,1]$.
>
> Consider $f : [0,1] \to [a,b]$ as
>
> $$f(x) = a + (b-a)x.$$
>
> Then, since $a < b$,
>
> $$f^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}.$$
>
> Thus $f(x)$ is a bijection proving the equipotence.
>
> So $[a,b]$ is uncountable.

■

Exercise 12: Prove that $\mathbb{R}$ is uncountable. ■

Exercise 13: Show that there is no one-one function from $[0,1]$ to $\mathbb{N}$. ■

Exercise 14: Is there a one-one function from $\mathbb{N}$ to $[0,1]$? ■

Exercise 15: Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{N}$ be any function. Show that there must exist $x, y\in\mathbb{R}$ such that $x\neq y$ but $f(x)=f(y)$. ■

Exercise 16: Give a bijection from $[0,1]$ to $[0,1)$. ■

আমরা জানি যে $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}^c$. আমরা এও জানি যে $\mathbb{Q}$ হল countable. এখন দেখতে পাচ্ছি যে $\mathbb{R}$ হল uncountable. সুতরাং এই uncountability-টা নিশ্চয়ই এসেছে $\mathbb{Q}^c$-এর থেকে। যদি $\mathbb{Q}^c$-ও countable হত তবে তো $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}^c$-ও countable-ই হত। সুতরাং পেলাম--

THEOREM

$\mathbb{Q}^c$ is uncountable.

যদি পুরো $\mathbb{Q}^c$ নিয়ে কাজ নাও করি খালি সেইসব irrational সংখ্যা নিই যারা $[0,1]$-এর মধ্যে আছে, তাদের set-ও একই কারণে uncountable, যেহেতু $[0,1]$ হল uncountable. সুতরাং--

THEOREM

For any $a<b\in\mathbb{R}$ the set $[a,b]\cap\mathbb{Q}^c$ is uncountable.

Exercise 17: আচ্ছা, $A, B\subseteq\mathbb{R}$ যদি দুজনেই uncountable হয়, তবে $A\cap B$-ও কি uncountable হতে বাধ্য? ■

এইবার একটা মজার অংক করব যেটার মধ্যে কোথাও কোনো countability-র গন্ধও নেই, কিন্তু countability-র ধারণা ব্যবহার না করলে কষা খুবই কঠিন।

Example 20: Correct of justify: there exists a monotonic function defined on $[0,1]$ such that the function is discontinuous at every irrational point in $[0,1]$.[2] **(2013.5b)**

SOLUTION: মনে আছে Example 17-এ আমরা দেখিয়েছিলাম যে একটা monotone function-এর set of discontinuity points সবসময়ে countable হতে বাধ্য?

> The statement is false.
>
> A corrected statement is: there is no monotonic function on $[0,1]$ that is discontinuous at every irrational point in $[0,1]$.
>
> Let, if possible, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ be a monotonic function that is discontinuous at every irrational point in $[0,1]$.
>
> Let D be the set of all discontinuity points of f.
>
> Let $B=\mathbb{Q}^c\cap[0,1]$.
>
> Then we are assuming $B\subseteq D$.
>
> We know that D must be countable.

We also know that $[0,1]$ is uncountable, while $\mathbb{Q}$ is countable.
So $A = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \mathbb{Q}$ is countable.
So $B = \mathbb{Q}^c \cap [0,1]$ must be uncountable.

⟦ Because:

Otherwise, $[0,1] = A \cup B$ would be countable.

⟧

But every subset of a countable set is countable. So $B \subseteq D$ must be countable $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

■

Answers

1. সমান। **3.** **(1)** $f(n) = n^2$. **(2)** $f(n) = n + 3$. **(3)** $f(n) = (-1)^n n$. **7.** এটা $\mathbb{N}$-এর subset. সুতরাং হয় finite নয়তো enumerable. কিন্তু আমরা জানি যে prime আছে infinitely many (এটা তোমরা classical algebra-য় পড়েছ)। **8.** $\because A \subseteq \mathbb{N}$ $\therefore A$ হয় finite নয়তো enumerable. ধরো $f : \mathbb{N} \to A$ হল one-one. তাহলে f-কে যদি $\mathbb{N}$ থেকে $f(\mathbb{N})$-তে একটা function বলে ভাবো তবে সেটা একটা bijection হবে। সুতরাং $f(\mathbb{N})$ আর $\mathbb{N}$ হবে equipotent. যেহেতু $\mathbb{N}$ হল infinite, সুতরাং $f(\mathbb{N})$-ও তাই। এদিকে $f(\mathbb{N}) \subseteq A$. অতএব A-র পক্ষে finite হওয়া অসম্ভব! **9.** A হল $\mathbb{N}$-এর একটা infinite subset. **12.** $\mathbb{R}$-এর মধ্যে $(0,1)$ আছে, যেটা uncountable. **13.** $f : (0,1) \to \mathbb{N}$ যদি one-one হত, তবে $(0,1)$ আর $f((0,1))$ হত equipotent, কিন্তু $f((0,1)) \subseteq \mathbb{N}$ তাই countable, এদিকে $(0,1)$ হল uncountable. **14.** হ্যাঁ, যেমন $f(n) = \frac{1}{n}$. **15.** নইলে একটা one-one function পেতাম $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$. সেক্ষেত্রে $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{N}$ হয়ে যেত $\mathbb{R}$-এর সঙ্গে equipotent. কিন্তু সেটা তো অসম্ভব, কারণ $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{N}$, তাই ও কি করে uncountable হবে? **16.** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{if } x = \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N}) \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$
17. না, $A = [0,1], B = [2,3]$ নিলে $A \cap B = \phi$, যেটা finite.।

Index